

Wiskunde & Filosofie:

Logica



1.



"ZIE JE DIE JONGEMAN DAARZ AAN DE OVERKANT? DAT IS EEN TERRORIST."

2.



"GROTE HEMEL, PA, WAAK ZIE JE DAT IN VREDESNAAM AAN?"

3.



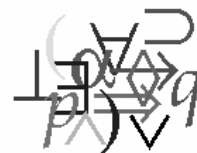
"DAT KUN JE NIET ZIEN, DAT IS JUIST HET VERRADERLYKE!"

4.

Naam: _____

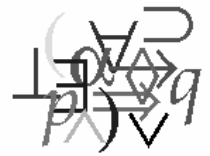


Samenstelling/docent: Hugo Bronkhorst
Schooljaar 2006/2007
Atheneum 4-M



Inhoudsopgave

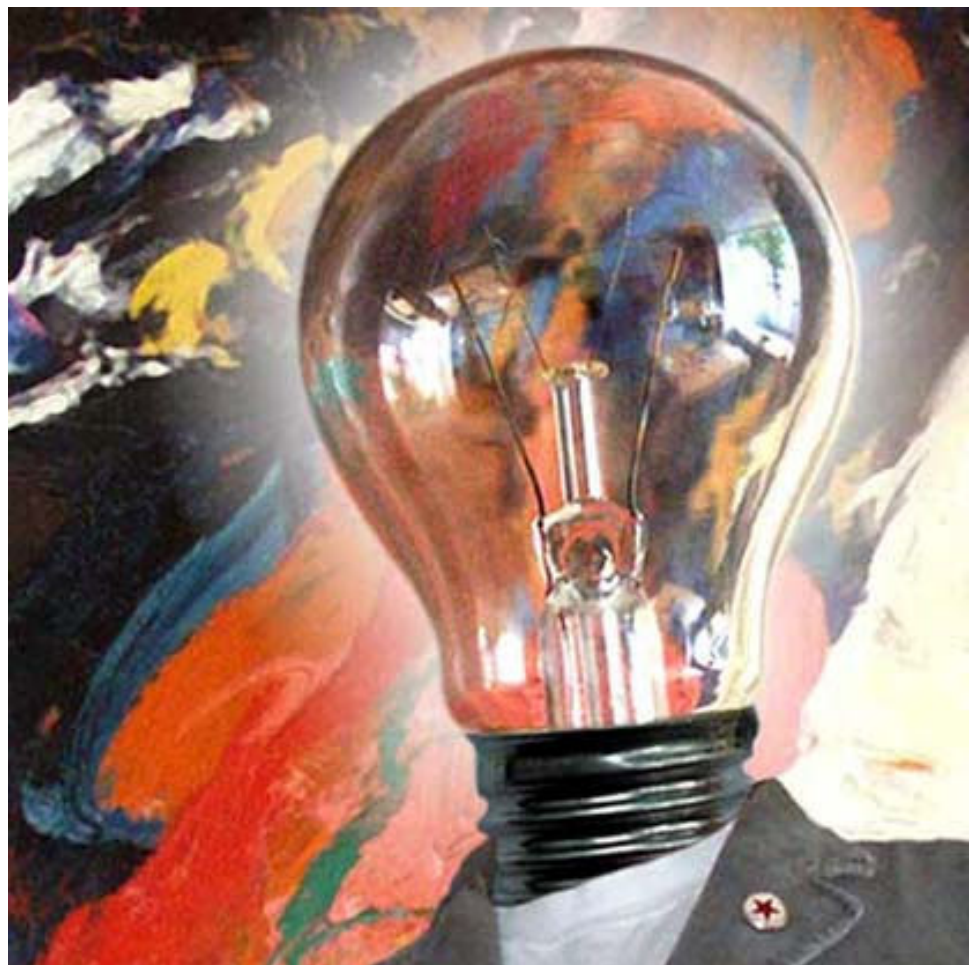
Inhoudsopgave	2
Inleiding	3
Logica	4
Les 1: Introductie + beweringen	5
Beweringen	8
Huiswerk 1	10
Les 2: Redeneren en bewijzen	11
Tegenvoorbeeld	13
Les 3: Vervolg redeneren en bewijzen	16
Kaartjes	20
Huiswerk 2	21
Les 4: Als...dan...-beweringen	22
De wijze adviseurs	22
Als-dan	24
Les 5: Nog meer als...dan...-beweringen	29
Equivalentie	33
Huiswerk 3	36
Les 6: Formules in de Propositielogica	37
Les 7: Waarheidstabellen	41
Huiswerk 4	49
Les 8: Tot slot	51
Extra opgaven	54
Lijst met afbeeldingen	57
Referenties	59

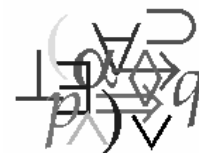


Inleiding

Wiskunde & Filosofie? Deze combinatie zal waarschijnlijk niet als eerste bij je opkomen. Toch zijn er genoeg raakvlakken. Zowel bij Wiskunde als bij Filosofie zijn kritisch nadenken en een goede redenering belangrijk. Door gebruik te maken van goede argumenten kun je een uitspraak onderbouwen. Naast (wiskundige) uitspraken die we gaan bewijzen of weerleggen, zal in deze lessenserie naar de Propositielogica worden toegewerkt. Met de waarheidstabellen uit de Propositielogica kunnen we moeilijke vraagstukken met een aantal rekenregels snel oplossen. De daarin gebruikte notatie zal je waarschijnlijk eerder aan Wiskunde dan aan Filosofie doen denken.

Deze lessenserie Wiskunde & Filosofie bestaat uit acht lessen, vier huiswerkopdrachten en een afsluitende toets. De huiswerkopdrachten en de toets maak je in Brainbox. De lessenserie telt als handelingsdeel. De voorwaarden voor dit handelingsdeel kun je in de studiewijzer terugvinden.





Logica

Logica is traditioneel de wetenschap van het redeneren en begint bij de oude Grieken. De Griekse filosoof Aristoteles ($\pm$ 384-322 v. Chr.) wordt beschouwd als de grondlegger van de Logica. Hij ontwikkelde een theorie van syllogismen. Syllogismen zijn redeneervormen. Er zijn 256 mogelijke syllogismen. Aristoteles dacht dat er hiervan 19 geldig waren. Later bleken dat er slechts 17 te zijn. Het bekendste syllogisme van Aristoteles is:

Alle mensen zijn sterfelijk,

Socrates is een mens,

Dus Socrates is sterfelijk.

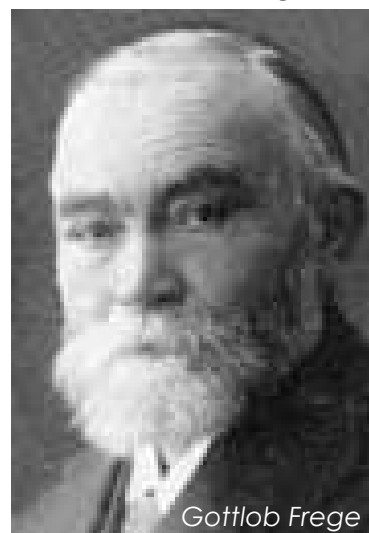
De volgende redenering gaat echter fout. Geef voordat je verder leest antwoord op de volgende vraag: 'Wat zou je kiezen: eeuwig geluk of een broodje kaas?' De meeste mensen zullen eeuwig geluk kiezen, dus dan geldt:

Niets is beter dan eeuwig geluk,

Een broodje kaas is beter dan niets,

Dus een broodje kaas is beter dan eeuwig geluk.

De Logica van de Grieken was niet volledig. Toch is er 2000 jaar niets mee gebeurd. Pas in de negentiende eeuw kwam de Duitse wiskundige, logicus en filosoof Gottlob Frege (1848-1925) met de Moderne Logica, die bestaat uit de 'Propositielogica' en de 'Predikatenlogica'. De Propositielogica gaat over uitspraken, waarvan we er in deze lessenserie verschillende gaan bekijken. De Predikatenlogica gaat over eigenschappen.

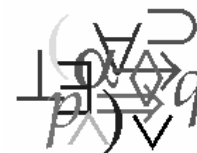


Gottlob Frege



Alan Turing

Sindsdien heeft de Logica een inhaalslag gemaakt. Tot op de dag van vandaag houden onder andere wiskundigen en filosofen zich bezig met Logica. Maar ook in de Informatica komt Logica terug. De Engelsman Alan Turing (1912-1954) is de stamvader van de Informatica. Hij ontwikkelde de zogenaamde Turing machine, die een basis bood voor het ontcijferen van Duitse geheime boodschappen tijdens de Tweede Wereldoorlog. Ook wordt er in de Informatica gebruik gemaakt van Logische Schakelingen.



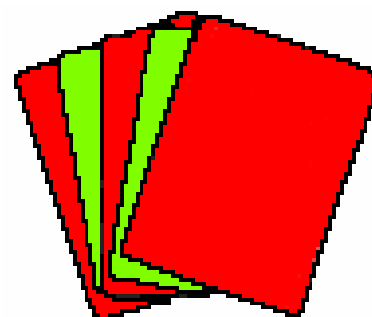
Les 1: Introductie + beweringen

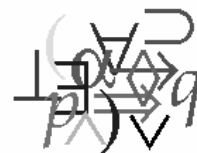
We beginnen deze lessenserie met het redeneren in een kaartspel dat groene en rode kaarten bevat. Je krijgt steeds één kaart in een rijtje van vijf te zien. We bekijken de kaartjes van links naar rechts. Aan jou de taak om de kleur van de andere kaarten te voorspellen! De regel die daarbij hoort:

*‘Als een kaart in het rijtje rood is,
dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.’*

De spelregels:

- 1) Het spel speel je in tweetallen. De tweetallen worden door de docent samengesteld.
 - 2) Verdeel de rollen voor de eerste ronde: ‘voorspeller’ en ‘toezichthouder’.
 - 3) De docent schudt de kaarten en hangt vijf willekeurige kaarten volgens bovenstaande regel met de zwarte zijde naar voren aan het bord.
 - 4) De docent vraagt de voorspellers welke kaart ze graag willen zien. De meeste stemmen gelden!
 - 5) De voorspeller vult nu op het werkblad (zie volgende pagina) achter ‘het gegeven rijtje’ de kaart in die is omgedraaid. Maak hierbij gebruik van kleurpotloden of de letters ‘R’ voor rood en ‘G’ voor groen.
 - 6) De voorspeller probeert nu de rij ‘jouw voorspelling’ zo goed mogelijk in te vullen waarbij hij bovenstaande regel in gedachten houdt.
 - 7) Hierna geeft de voorspeller het werkblad aan de toezichthouder. De toezichthouder vult de rij ‘het gegeven rijtje’ verder in nadat de docent alle kaarten heeft omgedraaid. Vervolgens vult hij de rij ‘score’ als volgt in: + voor een goede voorspelling, – voor een onjuiste voorspelling en X als er geen voorspelling is gedaan.
 - 8) De toezichthouder bepaalt het totaal aan plusjes, kruisjes en minnetjes en zet deze in de tabel ‘score ronde’.
 - 9) Wissel de rollen: ‘voorspeller’ wordt ‘toezichthouder’ en ‘toezichthouder’ wordt ‘voorspeller’.
 - 10) Herhaal stap 3 t/m 9 totdat er vijf rondes geweest zijn.
 - 11) De toezichthouder zet het totaal aan plusjes, kruisjes en minnetjes van de vijf rondes in de tabel ‘totale score’.
 - 12) De winnaar is het team met de meeste plusjes. Bij gelijkstand wint van hen het team met de minste minnetjes.
- Het winnende team krijgt natuurlijk een leuk prijsje van de docent.





Werkblad bij het kaartspel:

*'Als een kaart in het rijtje rood is,
dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'*

Ronde 1

het gegeven rijtje					
jouw voorspelling					
score					

Score ronde 1

+	X	-

Ronde 2

het gegeven rijtje					
jouw voorspelling					
score					

Score ronde 2

+	X	-

Ronde 3

het gegeven rijtje					
jouw voorspelling					
score					

Score ronde 3

+	X	-

Ronde 4

het gegeven rijtje					
jouw voorspelling					
score					

Score ronde 4

+	X	-

Ronde 5

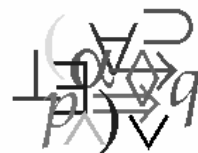
het gegeven rijtje					
jouw voorspelling					
score					

Score ronde 5

+	X	-

Totale score

+	X	-



Opdracht 1:

Probeer met je medespeler onderstaande vragen zo goed mogelijk te beantwoorden.

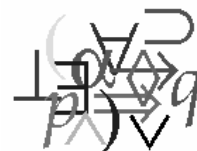
- a)** Hoeveel juiste voorspellingen kun je in elk spel maken bij een rijtje van vijf kaarten? Geef een duidelijke toelichting.

Hint: Wat zijn de mogelijkheden als je de eerste kaart te zien krijgt? Als de eerste kaart rood is, dan weet je dus..., maar als de eerste kaart groen is, dan... Hoe zit dat bij het zien van de tweede kaart? Enzovoorts.

- b)** Welke van de vijf kaarten wil jij het liefst omgedraaid zien?
En welke invloed heeft de omgedraaide kaart op jouw voorspelling?

- c)** Bespreek je antwoorden met een ander team.
Beschrijf hieronder de verschillen.

De komende lessen zullen we nog regelmatig terugkijken naar deze kaartjes. Daarvoor moet we echter eerst wat meer weten van de **als...dan...**-beweringen. En wat is een bewering eigenlijk?



Beweringen

In het spel met de rode en groene kaartjes werkte je met de volgende regel: "Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood." Van de vijf kaarten kreeg je er eentje te zien. Met redeneren probeerde je de rest zo goed mogelijk in te vullen. Redeneren doe je eigenlijk elke dag. Een paar voorbeelden:

- als ik hard fiets, dan kan ik het groene verkeerslicht halen
- als ik dit handelingsdeel niet doe, (dan) mag ik geen examen doen

Opdracht 2:

Verzin zelf nog twee van dit soort **als...dan...**-redeneringen.

Voordat we gaan redeneren in de wiskunde, moeten we weten wat een bewering is. De bewering 'Wortels van gehele getallen zijn nooit kleiner dan 0' is een ware bewering. Maar de bewering '8 is kleiner dan 7' is onwaar. Een bewering is dus een uitspraak die waar of onwaar is. Een bewering waarvan we nog niet weten of zij waar is, noemen we een vermoeden of hypothese.

Opdracht 3:

Geef aan of de volgende uitspraken beweringen zijn.

Zo ja, geef aan of ze waar of onwaar zijn.

a) Amsterdam is de hoofdstad van Noord-Holland.

b) Hoe gaat het?

c) Een vierkant heeft vier gelijke zijden.

d) $4 + 2$

e) $4 + 2 = 8$

f) een dag en 3 uur

vervolg op pagina 9

Bewering:

Zo ja:

Ja / Nee

Waar / Onwaar

Ja / Nee

Waar / Onwaar

Ja / Nee

Waar / Onwaar

Ja / Nee

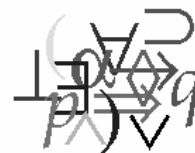
Waar / Onwaar

Ja / Nee

Waar / Onwaar

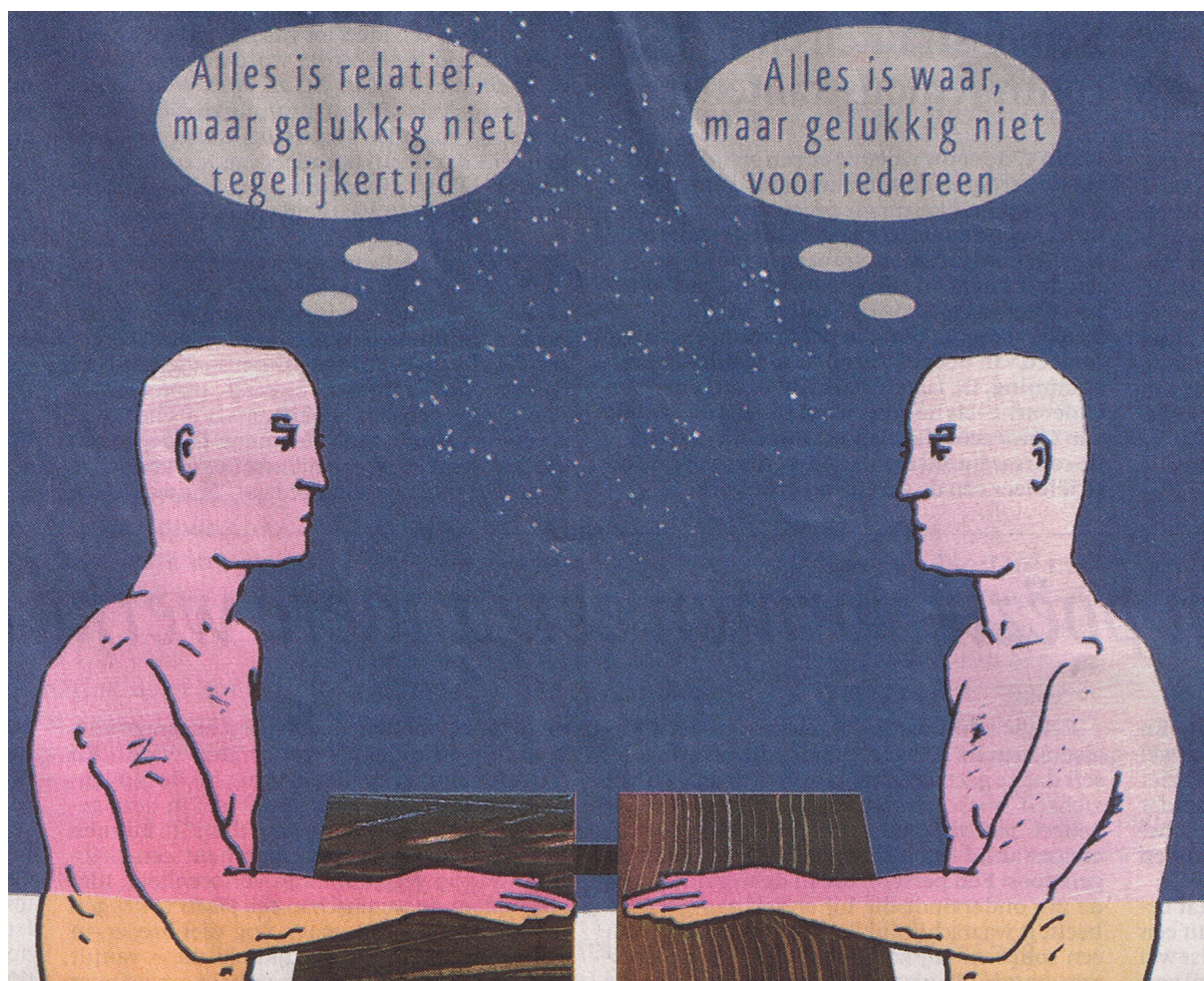
Ja / Nee

Waar / Onwaar

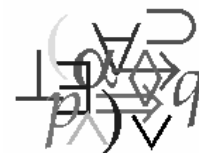


	Bewering:	Zo ja:
g) Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180° .	Ja / Nee	Waar / Onwaar
h) Kim zit 's ochtends op school of spijbelt.	Ja / Nee	Waar / Onwaar
i) Ik vind haar run.	Ja / Nee	Waar / Onwaar
j) Stijntje is op zaterdag en op zondag geboren.	Ja / Nee	Waar / Onwaar

Ook in de wiskunde redeneer je regelmatig om tot een goede oplossing te komen. In les 2 zullen we wiskundige beweringen gaan onderzoeken.



Tekening: Geert Setola

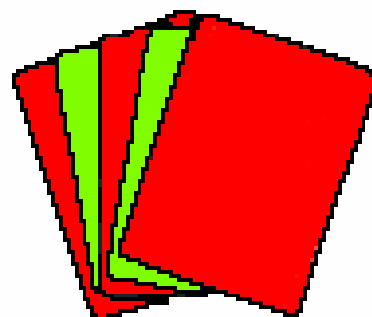


Huiswerk 1

Huiswerk 1 bestaat uit de volgende twee opdrachten:

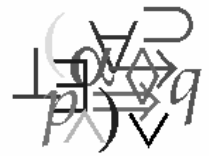
- **Huiswerk 1a: Kaartjes**

In Brainbox staan twaalf rijtjes van vijf kaarten. Elke kaart is rood (**R**) of groen (**G**) gekleurd. We bekijken de kaartjes van links naar rechts. Aan jou de taak om na te gaan of elk rijtje aan de gegeven regel *'Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'* voldoet.



- **Huiswerk 1b: Beweringen**

In deze Brainboxopdracht worden opdracht 2 en 3, die je hierboven gemaakt hebt, gecombineerd. Nadat je jouw redeneringen uit opdracht 2 hebt overgenomen, wordt gevraagd of jouw redeneringen ook beweringen zijn. Daar hoort natuurlijk een verklaring bij. Verder krijg je wat gegevens waarvan je een ware bewering moet maken. En in de laatste vraag mag je je creativiteit laten zien door met de meest originele bewering te komen.



Les 2: Redeneren en bewijzen

In de vorige les hebben we al een aantal beweringen bekeken. Om te onderzoeken of een wiskundige bewering waar is, kun je niets anders doen dan redeneren. Door enige redeneringen achter elkaar te houden kun je zo'n bewering vaak bewijzen. Een eigenschap of bewering die je kunt bewijzen heet een stelling.

Laten we eens naar een stelling gaan kijken:
'In een vierhoek is de som van de hoeken 360° .'

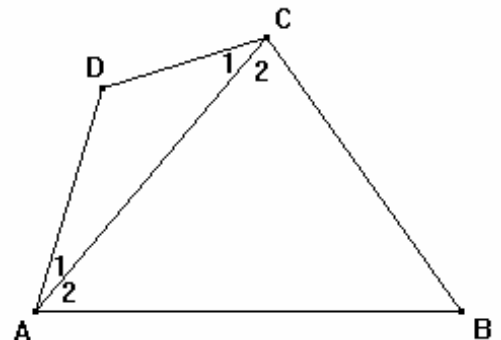
Deze stelling kunnen we herschrijven tot een als...dan...-bewering:
'Als ik een vierhoek heb, dan is de som van de hoeken 360° .'

We gaan dit voor elke vierhoek bewijzen. Je kunt dan dus géén vierhoek vinden waarvan de som van de hoeken geen 360° is.

Bewijs:

Teken een willekeurige vierhoek ABCD (zie figuur hiernaast). Als ik een vierhoek heb, dan kan hem altijd in twee driehoeken verdelen. Daarom tekenen we ook de diagonaal AC.

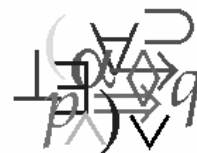
De vierhoek is nu verdeeld in twee driehoeken: $\triangle ACD$ en $\triangle ABC$. We weten al dat de som van de hoeken in een driehoek gelijk is aan 180° (weet je nog waarom?).



$$\begin{array}{l} \text{Dus: In } \triangle ACD \text{ is } \angle A_1 + \angle C_1 + \angle D = 180^\circ \\ \text{In } \triangle ABC \text{ is } \angle A_2 + \angle C_2 + \angle B = 180^\circ \\ \hline \angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 + \angle D + \angle B = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ \\ \text{Dus: } \angle A + \angle C + \angle D + \angle B = 360^\circ \end{array}$$

Q.E.D.

Q.E.D. is de afkorting van het Latijnse "quod erat demonstrandum". Letterlijk vertaald: "dat wat bewezen moest worden". Van oudsher is het gebruikelijk een bewijs met deze afkorting af te sluiten. De gewoonte om wiskundige beweringen te bewijzen is ontstaan bij de Grieken ruim 600 jaar voor Christus. In de eerste eeuw voor Christus schreef Euclides in dertien boeken een samenvatting van een flink deel van de wiskundige kennis die de Grieken hadden opgebouwd. Zijn werk heet 'de Elementen'. Iedere stelling wordt daarin bewezen. Ruim tweeduizend jaar zijn de Elementen als leerboeken gebruikt. Maar ook nu nog maken wij gebruik van die kennis.



 Opdracht 4:

Bewering: 'Een vijfhoek kan ik in drie driehoeken verdelen.'

a) Herschrijf deze bewering naar een als...dan...-bewering.

b) Laat zien dat deze bewering juist is.
Teken hiervoor een willekeurige vijfhoek $PQRST$.



c) Vul in:
Stelling: 'De som van de hoeken in een vijfhoek is gelijk aan _____°.'

d) Probeer het bewijs van de stelling uit opgave **c** netjes uit te schrijven.

Tegenvoorbeeld

In de bewijzen op pagina 11 en 12 kozen we voor een *willekeurige* vierhoek en voor een *willekeurige* vijfhoek. Dat woordje 'willekeurig' is belangrijk. Had je bij het bewijs over de hoekensom in een vierhoek voor een vierkant gekozen, dan weet je nog niet of de bewering ook waar is voor bijvoorbeeld een rechthoek, parallellogram of vlieger. Door een willekeurige vierhoek te kiezen geef je een bewijs voor *alle* vierhoeken. De bewering is dus waar voor *elke* vierhoek.

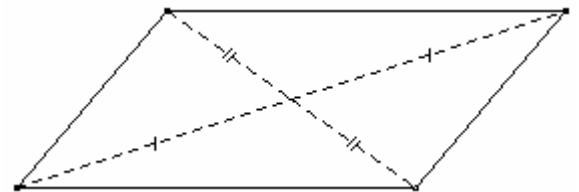
Soms lukt het echter niet om een vermoeden te bewijzen. Misschien is het vermoeden wel onjuist. Dan kun je op zoek gaan naar een tegenvoorbeeld. Eén tegenvoorbeeld is voldoende, want dan heb je aangetoond dat het vermoeden inderdaad niet juist is.



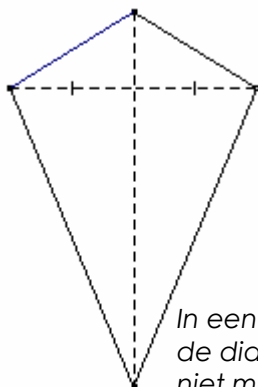
Laten we eens naar een vermoeden gaan kijken:

'In elke vierhoek snijden de diagonalen elkaar middendoor.'

Dit lijkt een mooie ware bewering. De bewering is juist voor een vierkant, een rechthoek, een parallellogram en een ruit. Juiste voorbeelden zijn echter nog geen bewijs. Willen we het vermoeden bewijzen, dan moet de bewering voor elke willekeurige vierhoek waar zijn. Een bewijs kunnen we niet geven, want het vermoeden is onjuist. De bewering is namelijk niet waar voor een vlieger.

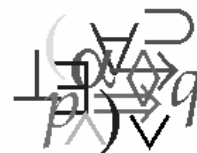


In een parallellogram snijden de diagonalen elkaar middendoor.



In een vlieger snijden de diagonalen elkaar niet middendoor.

Met één tegenvoorbeeld hebben we nu het vermoeden ontkracht. De bewering 'in elke vierhoek snijden de diagonalen elkaar middendoor' is dus onwaar.



 Opdracht 5:

Bewering: 'Elke vierhoek heeft minstens één rechte hoek.'

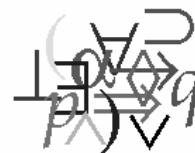
a) Herschrijf deze bewering naar een als...dan...-bewering.

b) Voor welke vierhoeken is deze bewering juist?

c) De bewering is echter onjuist. Geef minstens drie tegenvoorbeelden.
Een tekening kan daarbij helpen.

 Opdracht 6:

Bewering: 'In een vierhoek is elke hoek altijd kleiner dan 180° .'
Geef een tegenvoorbeeld bij deze bewering.



We hebben nu een aantal meetkundige beweringen bekeken. Maar ook op andere gebieden van de wiskunde kun je vermoedens bewijzen of ontkrachten met een tegenvoorbeeld. In de volgende opgave ga je een vermoeden uit de getaltheorie onderzoeken.

 Opdracht 7:

Vermoeden:

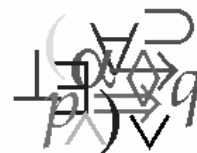
'De wortel uit een geheel getal is altijd kleiner dan het getal zelf.'

Bijvoorbeeld: $\sqrt{4} = 2$ en $2 < 4$ of $\sqrt{25} = 5$ en $5 < 25$.

a) Lever een bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

b) Hoe zit het met hogere machtswortels ($\sqrt[3]{}$ of $\sqrt[4]{}$)?





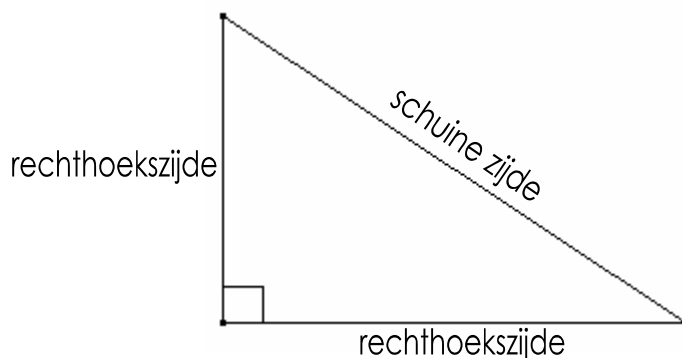
Les 3: Vervolg redeneren en bewijzen

Vraag je vader, moeder, een goede kennis of iemand op straat naar wiskunde en het eerste wat bij hem of haar zal opkomen is $a^2 + b^2 = c^2$. Dat is waarschijnlijk de bekendste stelling in de wiskunde: de stelling van Pythagoras. In woorden kun je de stelling van Pythagoras als volgt weergeven: 'In elke rechthoekige driehoek is (ene rechthoekszijde)² + (andere rechthoekszijde)² = (schuine zijde)².'

Hier kun je ook een als...dan...bewering van maken: 'Als ik een rechthoekige driehoek heb, dan geldt (ene rechthoekszijde)² + (andere rechthoekszijde)² = (schuine zijde)².'

De rechthoekszijden zijn de zijden bij de rechte hoek. De schuine zijde ligt tegenover de rechte hoek en is de langste zijde van de driehoek.

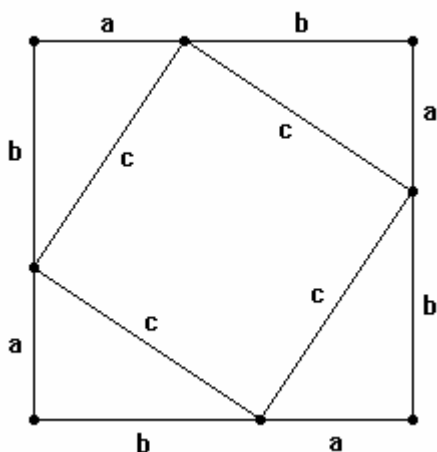
In klas 2 heb je met hokjes tellen aangetoond dat de stelling waar moest zijn, maar kunnen we ook een net bewijs geven?



Opdracht 8:

Bewering: 'Als ik een rechthoekige driehoek heb, dan geldt (ene rechthoekszijde)² + (andere rechthoekszijde)² = (schuine zijde)².'

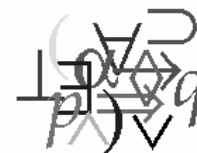
Om dit te bewijzen nemen we vier gelijke rechthoekige driehoeken, die met hun schuine zijden een vierkant insluiten:



a) Laten we voordat we het algemene geval gaan bewijzen eerst eens naar een getallenvoorbeeld kijken. Neem $a = 3$ cm en $b = 4$ cm. Bereken c .

zijde	kwadraat
$a = 3$	
$b = 4$	
$c =$	

+
Dus $c =$ ____ cm.



b) We kunnen nu de oppervlakte van het grote vierkant en van het ingesloten vierkant bepalen. Vul in:

Het grote vierkant heeft zijden van $\underline{\hspace{1cm}}$ + $\underline{\hspace{1cm}}$ = $\underline{\hspace{1cm}}$ cm.

De oppervlakte van het grote vierkant is dan: _____ cm^2 .

Het ingesloten vierkant heeft zijden van ____ cm (zie **a**).

De oppervlakte van het ingesloten vierkant is dan: _____ cm^2 .

De oppervlakte van het grote vierkant moet dus gelijk zijn aan de oppervlakte van het ingesloten vierkant + de oppervlakte van de vier driehoeken.

De oppervlakte van één driehoek is $\frac{1}{2} \cdot \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ cm².

De oppervlakte van de vier driehoeken is dan: _____ cm^2 .

Dus: opp. grote vierkant = opp. ingesloten vierkant + opp. 4 driehoeken

Dus: $\underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^2.$

Klopt!

c) In dit getallenvoorbeeld hebben we bij **a** al de stelling van Pythagoras gebruikt terwijl we die stelling juist willen bewijzen. Laten we daarom de stappen van **b** nu eens met letters uitschrijven.

Het grote vierkant heeft zijden van lengte ____ + ____.

De oppervlakte van het grote vierkant is dan:

$$(\underline{\quad} + \underline{\quad})^2 = (\underline{\quad}) \cdot (\underline{\quad}) = \underline{\quad}.$$

Het ingesloten vierkant heeft zijden van lengte ____.

De oppervlakte van het ingesloten vierkant is dan: _____.

De oppervlakte van het grote vierkant moet dus gelijk zijn aan de oppervlakte van het ingesloten vierkant + de oppervlakte van de vier driehoeken.

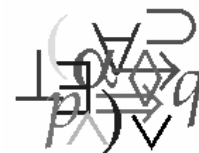
De oppervlakte van één driehoek is $\frac{1}{2} \cdot \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$.

De oppervlakte van de vier driehoeken is dan: _____.

Dus: opp. grote vierkant = opp. ingesloten vierkant + opp. 4 driehoeken

Dus: _____.

Oftewel: _____ (de stelling van Pythagoras!) Q.E.D.



d) Beschrijf in je eigen woorden waarom het gegeven bewijs in opgave c juist is. Hoe weet je bijvoorbeeld dat het ingesloten vierkant met zijden van lengte c een vierkant is?



In opdracht 8 heb je de stelling van Pythagoras bewezen. Waarschijnlijk heeft Pythagoras zelf een ander bewijs gegeven. Pythagoras ($\pm$ 580-496 v. Chr.) werd op het Griekse eiland Samos geboren. Hij heeft veel gereisd en maakte daardoor kennis met wiskundige methoden die de Egyptenaren en Babyloniërs (inwoners van het huidige Irak en omgeving) gebruikten. In Zuid-Italië stichtte hij een school waar men Wiskunde, Sterrenkunde, Muziektheorie, maar vooral Filosofie bestudeerde. Pythagoras probeerde alles met behulp van getallen te weten te komen: 'alles is getal.' Aan hem wordt dan ook de ontdekking van de getalsverhoudingen in muziek toegeschreven.

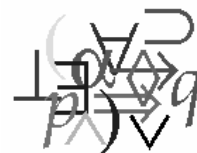
In de wiskunde is Pythagoras dus vooral bekend vanwege de stelling van Pythagoras. De stelling was echter niet nieuw. Zij werd al vele eeuwen gebruikt, maar was nog nooit bewezen. Pythagoras bracht daar verandering in. De mythe gaat dat hij na het vinden van zijn bewijs honderd ossen aan de goden offerde. Jouw bewijs uit opdracht 8 en het bewijs van Pythagoras zijn

niet de enige bewijzen. Zo hebben bijvoorbeeld Leonardo da Vinci (1452-1519) en de Amerikaanse president James Abram Garfield (1831-1881) de stelling ook bewezen. In 1914 had de Nederlander Jan Versluys (1845-1920) 96 verschillende bewijzen in een boekje verzameld. De Amerikaan Elisha Scott Loomis (1852-1940) wist er echter nog meer te verzamelen en kwam in 1927 met meer dan 250 bewijzen.

In het huiswerk ga je nog wat verder met bewijzen in de vlakke meetkunde. In les 4 zullen we ook nog een door wiskundigen veel gebruikte bewijsmethode bekijken: bewijzen met behulp van inductie. Inductie komt uit het Latijn en is een wijze van redeneren waarbij je van het bijzondere naar het algemene gaat.



Koninkrijk Babylonië



Kaartjes

We gaan terug naar de kaartjes uit les 1. Bij de kaartjes hoorde de volgende regel:

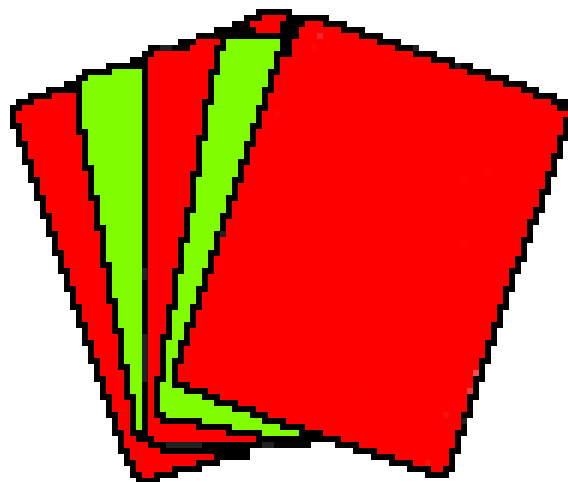
*'Als een kaart in het rijtje rood is,
dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'*

Bij je voorspellingen met het kaartspel en in opdracht 1 kwam je er achter dat je de regel alleen van links naar rechts kunt lezen. Blader nog even terug: Wat weet je over de andere kaarten als een bepaalde kaart rood (**R**) is? En hoe zit het met een groene (**G**) kaart?

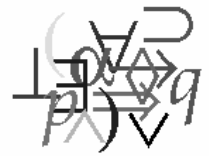
Opdracht 9:

Hieronder staan vier rijtjes van vijf kaarten. Bij elk rijtje is één kaart gegeven. Een kaart is rood (**R**) of groen (**G**) gekleurd. Probeer de rijtjes zo compleet mogelijk te maken. Zet een **R** op de kaart als een kaart rood moet zijn, zet een **G** op de kaart als de kaart groen moet zijn en zet een **X** op de kaart als je niet kunt weten of de kaart rood of groen moet zijn. Gebruik daarbij bovenstaande regel.

- a) ☐ ☐ **R** ☐ ☐ ☐ ;
- b) ☐ ☐ ☐ **R** ☐ ☐ ;
- c) ☐ ☐ ☐ **G** ☐ ☐ ;
- d) ☐ ☐ ☐ ☐ **G** ☐.



Met behulp van opdracht 9 kunnen we nu de volgende conclusies trekken: Als er een rode kaart gegeven is, zijn de kaarten daarna ook rood. Maar je kunt niets zeggen over de kaart ervoor, die kan zowel rood als groen zijn. Laat staan dat je iets kunt zeggen over de andere kaarten daarvoor. Bij een groene gaat dat net andersom. Als een bepaalde kaart groen is, dan moeten alle kaarten daarvoor ook groen zijn. Maar je kunt niets zeggen over de kaart daarna, die kan zowel rood als groen zijn. Laat staan dat je iets kunt zeggen over de andere kaarten daarna.



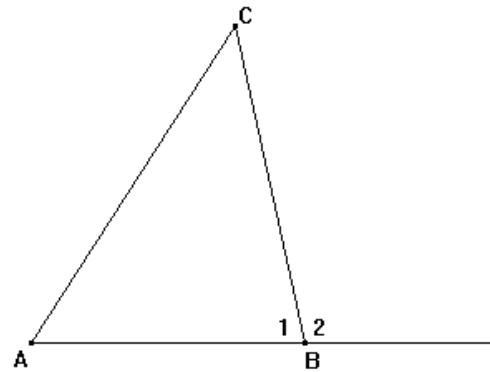
Huiswerk 2

Huiswerk 2 bestaat uit de volgende twee opdrachten:

- **Huiswerk 2a: Bewijzen**

In deze Brainboxopdracht word je gevraagd een bewijsje af te maken. Daarbij moet je weten wat een buitenhoek is: in de figuur hiernaast is $\angle B_2$ de buitenhoek van hoek B in driehoek ABC.

Daarnaast word je gevraagd zelf een meetkundige bewering te verzinnen en deze te bewijzen als zij waar is of een tegenvoorbeeld te geven als zij onwaar is.



- **Huiswerk 2b: Kaartjes**

In Brainbox staan twaalf rijtjes van vijf kaarten. Bij elk rijtje zijn vier kaarten gegeven. Een vijfde kaart ligt nog omgekeerd. Je weet niet of die kaart rood (**R**) of groen (**G**) gekleurd is. We bekijken de rijtjes van links naar rechts. Aan jou de taak om na te gaan of elk rijtje aan de gegeven regel 'Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.' voldoet.

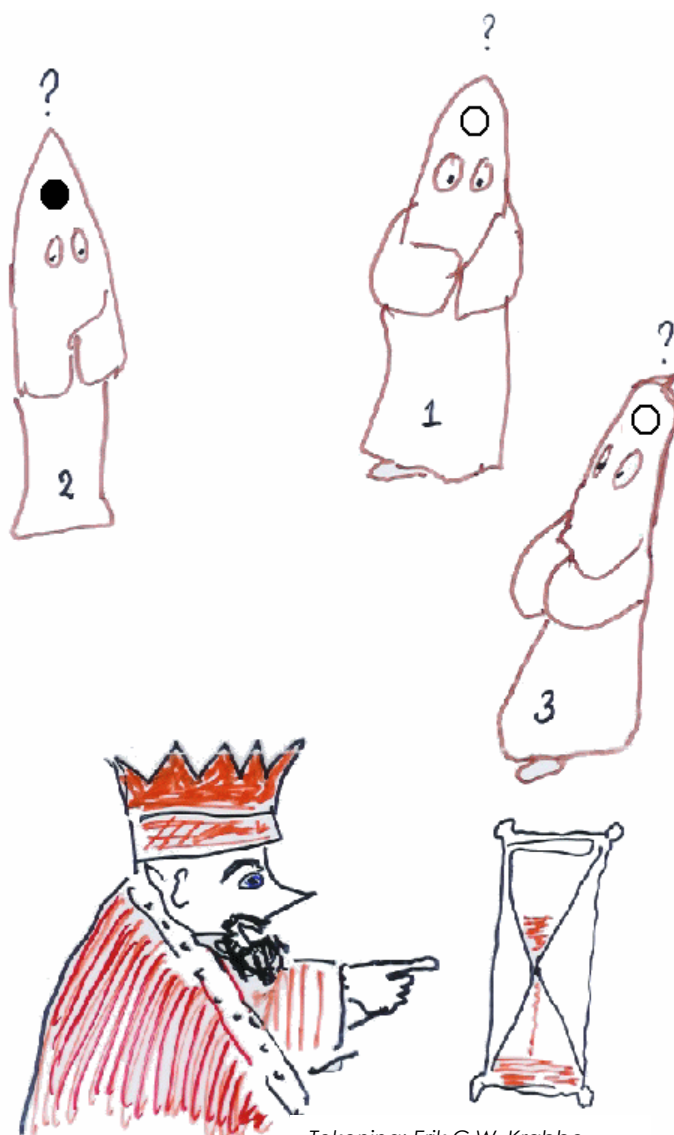
Les 4: Als...dan...-beweringen

In de afgelopen lessen heb je al verschillende als...dan...-redeneringen en als...dan...-beweringen gezien. In deze les gaan we daar eens wat beter naar kijken: hoe gebruiken we als-dan in het Nederlands? En hoe schrijven we als-dan in de wiskunde?

De wijze adviseurs

Lang geleden in een land hier ver vandaan was er een koning die de wijsheid van zijn adviseurs wilde testen. Hij deed dat op de volgende manier: hij blinddoekte alle adviseurs en schilderde een witte of een zwarte stip op hun voorhoofd en verstopte de verfspullen. Vervolgens liet hij ze de blinddoeken afdoen en stelde hij hen zodanig in een kring op dat iedereen, op zijn of haar eigen stip na, alle stippen kon zien. Toen ging de koning midden in de kring staan en zei:

"Ik heb bij ieder van jullie een witte of een zwarte stip op het voorhoofd geschilderd. Ten minste één van de stippen is zwart. Wie een zwarte stip heeft, dient zo snel mogelijk naar voren te stappen."



Tekening: Erik C.W. Krabbe

Nu was het algemeen bekend onder de adviseurs dat ieder van hen perfect logisch kon redeneren en dat ieder van hen zodanig eerzuchtig was, dat hij/zij zo snel mogelijk naar voren zou stappen om zijn/haar kennis ten toon te spreiden. Maar de adviseurs keken wel uit om voortijdig te gokken, want de koning kon zeer slecht tegen een ongemotiveerd antwoord.



● Klassenopdracht:

We weten nog niet hoe de adviseurs er achter zijn gekomen wie een zwarte stip heeft. Daarom verplaatsen we ons terug in de tijd. Jullie zijn de adviseurs en de docent zal de koning spelen.

De adviseurs gaan zodadelijk in een kring staan en doen allen hun ogen dicht. Je krijgt dan van de docent een sticker, die wit of zwart gekleurd is. Daarna zal de docent, die de koning speelt, jullie de cruciale vraag stellen wie een zwarte stip heeft (ten minste één). Daarbij mag je wel weer kijken, maar er mag natuurlijk niet gepraat worden.

Succes!

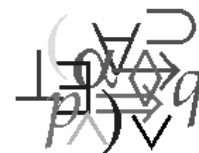
✎ Opdracht 10:

a) Beschrijf in je eigen woorden waarom de adviseur met een zwarte stip in de **eerste ronde** wist dat hij/zij een zwarte stip had.

b) Een adviseur met een zwarte stip wist in de **tweede ronde** dat er ____ of ____ adviseurs met een zwarte stip waren. Kun je dat verklaren?

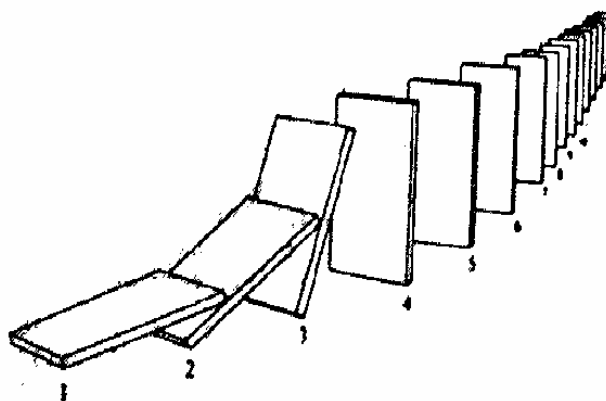
c) Beschrijf de redenering van een adviseurs met een witte stip in de **tweede ronde**.

In het huiswerk wordt gevraagd de situatie te beschrijven als drie adviseurs een zwarte stip hebben.



Bij de wijze adviseurs hebben we gewerkt met gevalonderscheiding. We begonnen met het eenvoudigste geval, namelijk één adviseur met een zwarte stip. Daarna keken we naar twee adviseurs met een zwarte stip. In het huiswerk kijk je naar drie adviseurs met een zwarte stip. Zo kun je doorgaan met vier, vijf, zes, ... , n adviseurs met een zwarte stip. Waarbij je dus oneindig veel situaties hebt. Het is onmogelijk om die situaties allemaal op te schrijven. Toch is deze manier van redeneren bruikbaar. Je begint met een bijzonder geval (één adviseur met een zwarte stip) en je wilt naar het algemene geval (n adviseurs met een zwarte stip). Dat noemen we redeneren met behulp van inductie.

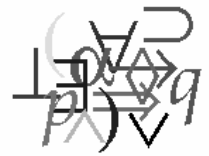
In de wiskunde wordt bij veel bewijzen van dit systeem gebruik gemaakt. We noemen dat dan een bewijs met behulp van volledige inductie. In het bewijs wordt dan aangetoond dat de bewering waar is voor het eenvoudigste geval (bijzonder). Daarna neem je aan dat de bewering ook waar is voor het n -de geval en laat je zien dat de bewering klopt voor het $(n+1)$ -de geval (algemeen). Je kunt dit vergelijken met het vallen van dominostenen. De eerste steen valt (bijzonder). Als een steen valt, dan valt ook de steen daarachter. Dus: alle stenen vallen (algemeen).



Als-dan

De adviseurs gebruikten een aantal als...dan...-redeneringen voordat zij de juiste conclusie konden trekken. Ook veel beweringen hebben de vorm als...dan.... In het Nederlands willen de woorden als en/of dan nog wel eens verdwijnen terwijl ze wel bedoeld zijn. Dit komt omdat de woordvolgorde in het Nederlands niet strikt is vastgelegd.

In het Engels en het Frans gebruikt men de woorden als en dan een stuk preciezer. Het woordje **als** is in die talen altijd terug te vinden: **if** resp. **si**. **Dan** – **then** resp. **alors** – is ook vaak terug te vinden in als...dan...-redeneringen of -beweringen, maar wordt ook wel weggelaten. Daarnaast hebben het onderwerp en de persoonsvorm een vrijwel vaste volgorde.



Laten we de volgende bewering nogmaals bekijken:

- **als** ik hard fiets, **dan** kan ik het groene verkeerslicht halen

Zonder de betekenis van deze bewering te veranderen, kunnen we ook schrijven:

- **als** ik hard fiets, kan ik het groene verkeerslicht halen
- fiets ik hard, **dan** kan ik het groene verkeerslicht halen
- ik kan het groene verkeerslicht halen **als** ik hard fiets
- **zodra** ik hard fiets, kan ik het groene verkeerslicht halen
- door hard te fietsen, kan ik het groene verkeerslicht halen

In spreektaal gebruiken we ook wel eens **wanneer** in plaats van **als**:

- **wanneer** ik hard fiets, kan ik het groene verkeerslicht halen

Het woordje **als** gaat echter uit van een veronderstelling: als dat het geval zou zijn. De betekenis van **wanneer** is net wat sterker. We zullen in deze lessen wanneer dus niet gebruiken.

De woorden **als** en **dan** worden hier gebruikt in redeneringen en beweringen. Als en dan hebben daarin een geheel andere betekenis dan in bijvoorbeeld: 'Peter is even groot als Harm, maar Peter is groter dan André.'

Opdracht 11:

Blader nog eens terug naar jouw **als...dan...**-redeneringen uit opdracht 2 (pagina 8). Herschrijf deze redenering naar een vorm waarbij je **niet** met **als** begint.

In de wiskunde wordt als-dan vaak geschreven met een pijl:

- ik fiets hard $\Rightarrow$ ik kan het groene verkeerslicht halen

Een uitspraak in deze vorm noemen we een implicatie. De pijl wordt de implicatiepijl genoemd. Deze pijl zal straks bij de waarheidstabellen voor een korte notatie zorgen.

Opdracht 12:

Lees de onderstaande strip, die ook op de voorkant staat.



1.



"ZIE JE DIE JONGEMAN DAAR AAN DE OVERRANT? DAT IS EEN TERRORIST."

2.



"GROTE HEMEL, PA, WAAR ZIE JE DAT IN VREDESNAAM AAN?"

3.



"DAT KUN JE NIET ZIEN DAT IS JUIST HET VERRAADERLYKE!"

4.

De vader doet een nogal beschuldigende uitspraak. Zijn uitspraak kun je omzetten in een als...dan...-bewering.

a) Herschrijf de uitspraak van vader naar een als...dan...-bewering.

b) Kun je die uitspraak omdraaien?
Verklaar je antwoord.

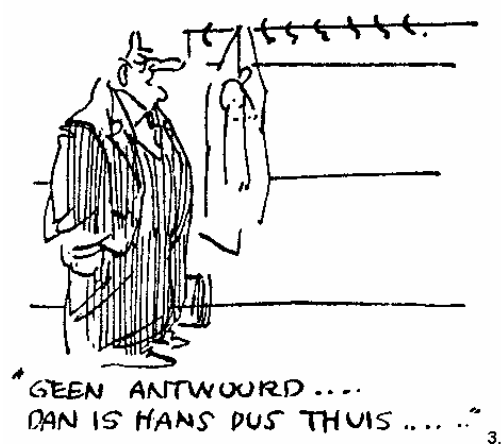
Omdraaien betekent:

als -uitspraak 1-, dan -uitspraak 2-
wordt

als -uitspraak 2-, dan -uitspraak 1-

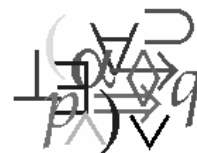
 Opdracht 13:

Lees de onderstaande strip.



a) Herschrijf de uitspraak van vader naar een als...dan...-bewering.

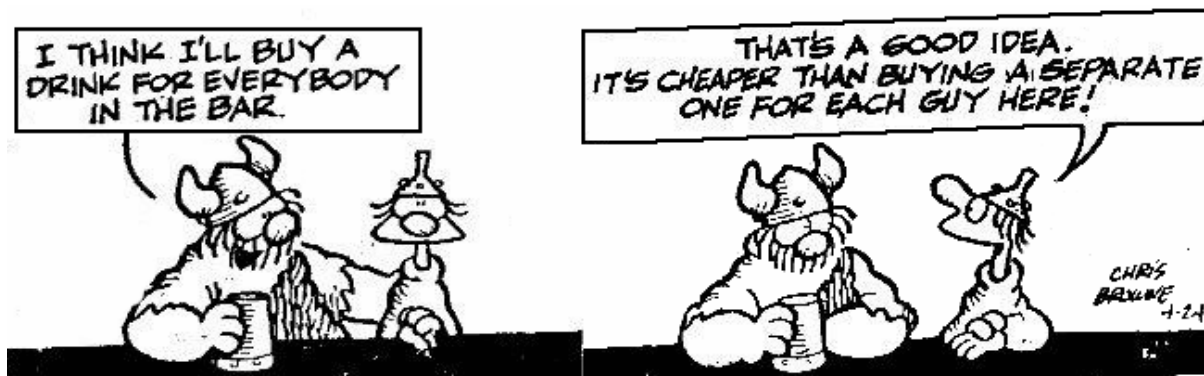
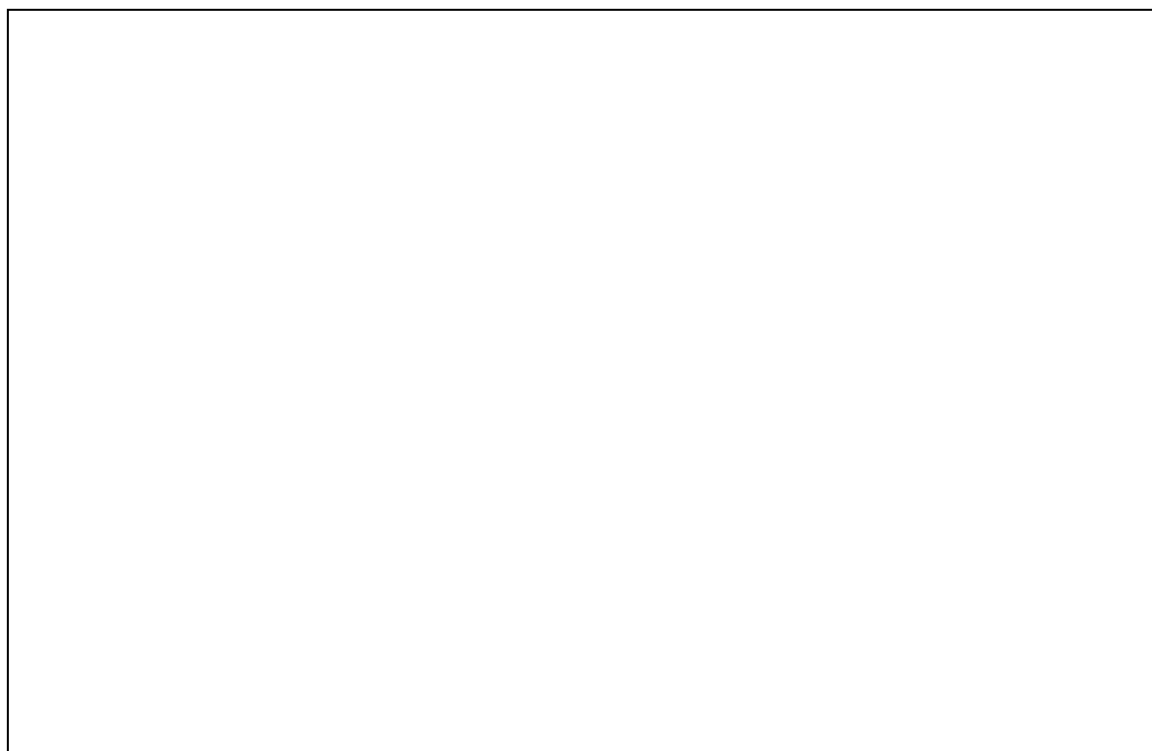
b) Wat is er mis met zijn redenering? Geef een duidelijke toelichting.



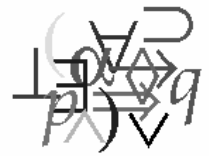
In opdracht 12 en 13 heb je gezien dat je moet oppassen met als...dan...-beweringen. Je kunt ze niet zomaar omdraaien. In opdracht 12 was vader duidelijk bevooroordeeld en was zijn argument een drogrede. In opdracht 13 trekt vader wel een erg voorbarige conclusie. De redenering staat als het ware op haar kop. In les 5 zullen we wat conclusies over als...dan...-redeneringen gaan opschrijven.

Opdracht 14:

Maak zelf een strip waarin een redenering op haar kop staat.



Tekening: Chris Browne



Les 5: Nog meer als...dan...-beweringen

Wanneer is een als...dan...-bewering waar? En wat maakt een als...dan...-bewering onwaar? Om dat te onderzoeken gaan we terug naar de regel bij de kaartjes:

*'Als een kaart in het rijtje rood is,
dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'*

Opdracht 15:

- a) Leg uit waarom deze regel over gaat in een ware bewering voor de rijtjes:

R R R R R en G G G G G.

- b) Noem R een kaart is rood, en G een kaart is groen.
Verder betekent ... R het ernaast gelegen kaartje is rood, en
... G het ernaast gelegen kaartje is groen.
Hiermee herschrijven we de regel met de implicatiepijl tot: R $\Rightarrow$... R.

Vul de volgende zinnen aan:

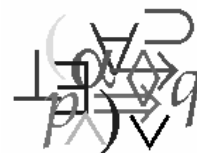
1) Een kaart in het rijtje is rood, de volgende kaart is dan _____.
We noemen dat modus ponens (bevestigende modus). Je gebruikt gewoon: R $\Rightarrow$... R.

2) Een kaart in het rijtje is groen, de vorige kaart is dan _____.
We noemen dat modus tollens (ontkennende modus). Je zegt dan eigenlijk de volgende kaart is niet rood, dus de vorige ook niet. Je leest de regel ontkennend van rechts naar links. Kort opgeschreven: niet-R $\Leftarrow$ niet-... R, oftewel:

G $\Leftarrow$... G, oftewel: ... G $\Rightarrow$ G.

3) Een kaart in het rijtje is groen, de volgende kaart is dan _____ of _____. Kort opgeschreven: G $\Rightarrow$ (... R of ... G).

4) Een kaart in het rijtje is rood, de vorige kaart is dan rood of groen.
Kort opgeschreven: _____.



In opdracht 15 hebben we alleen ware beweringen bij de gegeven regel bekeken. Een rijtje waarin een groene kaart op een rode kaart volgt, voldoet niet aan de regel. Kort opgeschreven: $\boxed{R} \Rightarrow \dots \boxed{G}$ is onwaar.

Hetzelfde kunnen we doen met de meetkundige redeneringen en beweringen uit les 2 en 3. Laten we nogmaals kijken naar de volgende twee beweringen:

- 'Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180° .'
- 'In elke vierhoek snijden de diagonalen elkaar middendoor.'

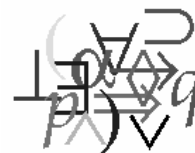
Opdracht 16:

a) Laat zien dat je de bewering 'Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180° .' niet zomaar om kan draaien.

b) Je kunt deze bewering wel ontkennend omdraaien (modus tollens). Schrijf die bewering in de als...dan...-vorm op.

c) Is de bewering 'Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180° .' waar voor een ruit? Geef een duidelijke toelichting.

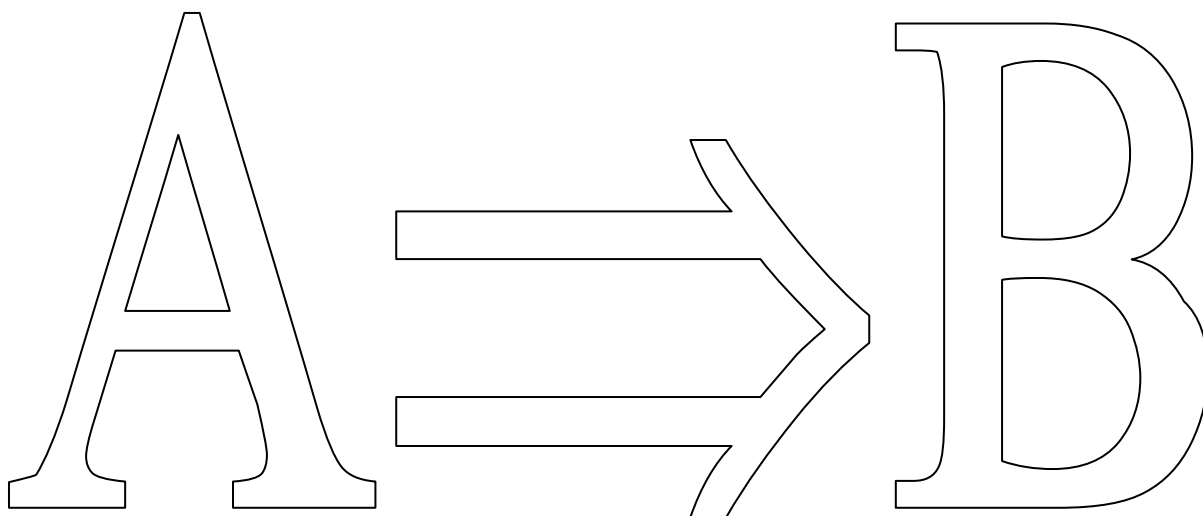
De tweede bewering 'In elke vierhoek snijden de diagonalen elkaar middendoor.' was in het algemeen onwaar, maar kon waar gemaakt worden door een vierkant of een rechthoek te kiezen.



In opdracht 15 heb je een als...dan...-bewering al verkort met de implicatiepijl. Laten we nu eens naar de algemene vorm kijken:

als A, dan B

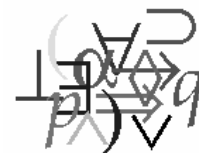
A en B zijn uitspraken die je vrij mag invullen.



Opdracht 17:

Geef intuïtief aan of de volgende beweringen waar of onwaar zijn. Ga daarbij uit van de bovenstaande vorm: **als A, dan B**.

- | | |
|--|---------------|
| a) A, dus: B | Waar / Onwaar |
| b) B, dus: A | Waar / Onwaar |
| c) niet-A, dus: niet-B | Waar / Onwaar |
| d) niet-B, dus: niet-A | Waar / Onwaar |
| e) A, dus: niet-B | Waar / Onwaar |
| f) niet-A, dus: B | Waar / Onwaar |
| g) niet-A, dus: $A \Rightarrow B$ is waar | Waar / Onwaar |



 Opdracht 18:

Vul dit schema nogmaals in als je voor A en B de volgende uitspraken neemt:

A: het sneeuwt

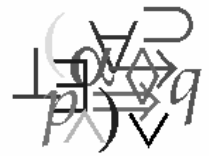
B: Sandra komt niet naar school

Dus: **als** het sneeuwt, (**dan**) komt Sandra niet naar school.

- a)** A, dus: B Waar / Onwaar
het sneeuwt, dus: Sandra komt niet naar school
- b)** B, dus: A Waar / Onwaar
Sandra komt niet naar school, dus: het sneeuwt
- c)** niet-A, dus: niet-B Waar / Onwaar
niet-(het sneeuwt), dus: niet-(Sandra komt niet naar school)
het sneeuwt niet, dus: Sandra komt (wel) naar school
- d)** niet-B, dus: niet-A Waar / Onwaar
Sandra komt (wel) naar school, dus: het sneeuwt niet
- e)** A, dus: niet-B Waar / Onwaar
het sneeuwt, dus: Sandra komt (wel) naar school
- f)** niet-A, dus: B Waar / Onwaar
het sneeuwt niet, dus: Sandra komt niet naar school
- g)** niet-A, dus: $A \Rightarrow B$ is waar Waar / Onwaar
het sneeuwt niet, dus:
'als het sneeuwt, (dan) komt Sandra niet naar school' is waar
- h)** Vergelijk je antwoorden met opdracht 17. Probeer eventuele verschillen te verklaren.



- i)** Bespreek de verschillen met een klasgenoot.



Uit een als...dan...-bewering kun je dus alleen een juiste conclusie trekken als A en B beide waar zijn (modus ponens), of als B niet waar is en A dus ook niet (modus tollens). Bij modus ponens lees je de bewering netjes van links naar rechts. Bij modus tollens lees je de bewering ontkennend van rechts naar links.

De als...dan...-bewering zelf is in veel gevallen waar. Zij is vanzelfsprekend waar als A en B waar zijn. Daarnaast kan zij nooit waar zijn als A wel waar is, maar B niet. Maar de als...dan...-bewering is ook waar als A niet waar is. Het maakt dan namelijk niet uit welke conclusie je trekt, want de als...dan...-bewering zegt niets over niet-A.

'Als het sneeuwt, (dan) komt Sandra niet naar school.' is dus alleen onwaar als Sandra naar school komt terwijl het sneeuwt. Als het niet sneeuwt, weet je niet of Sandra wel of niet naar school komt. De gehele als...dan...-bewering is dan dus waar.

Ga dit laatste zelf na bij de volgende twee voorbeelden:

- 'Als je dit medicijn neemt, (dan) word je beter!'
- 'Als je op het schoolfeest een biertje wilt bestellen, (dan) moet je minimaal 16 jaar zijn.'

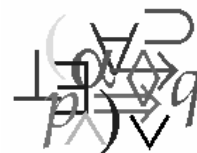


Equivalentie

Naast de gewone als...dan...-beweringen ($A \Rightarrow B$) heb je ook nog *juist dan als*. We spreken dan van een dubbele implicatie of equivalentie. Er moet dan gelden: $A \Rightarrow B$, maar ook: $B \Rightarrow A$. Je kunt dat korter opschrijven met de dubbele implicatiepijl: $A \Leftrightarrow B$. Deze pijl ga je bij de waarheidstabellen gebruiken.

Laten we de bovenstaande voorbeelden eens omdraaien:

- 'Als je beter wordt, (dan) neem je dit medicijn!' oftewel:
'Als je beter wilt worden, (dan) neem je dit medicijn!'
Dat is natuurlijk onzin! Wie zegt dat je alleen beter wordt als je dat specifieke medicijn neemt? Deze bewering is dus **niet** equivalent.
- 'Als je minimaal 16 jaar bent, (dan) mag je op het schoolfeest een biertje bestellen'
Deze bewering is wel waar, dus equivalent.



Opdracht 19:

Bekijk de volgende wiskundige bewering:

'Als $x < 5$, dan x is even.'
oftewel: ' $x < 5 \Rightarrow x$ is even'

a) Voor welke positieve gehele getallen x is deze bewering waar?

b) Wanneer is deze bewering onwaar?

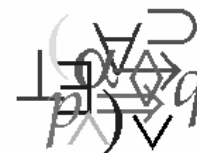
c) Is de als...dan...-bewering dus waar of onwaar? Verklaar je antwoord.

d) Wat gaat er hier mis met modus tollens?

Opdracht 20:

Blader nog eens door de lessen. Zijn we al equivalente beweringen tegen gekomen? Misschien heb je ze zelf wel opgeschreven.

Geef hieronder aan welke als...dan...-beweringen equivalent zijn. Geef een duidelijke toelichting.



Opdracht 21: Uit de school geklapt!

Los de onderstaande puzzel op.

Zes leraren vergaderden in de personeelskamer aan een lange rechthoekige tafel over de bevordering van enkele leerlingen uit klas A4M. Kun je aan de hand van de onderstaande aanwijzingen in de tekening aangeven wie waar zat en welk vak hij of zij geeft?

Met 'leraar' kan zowel een man als een vrouw bedoeld worden. Verder zijn de combinaties niet op waarheid gebaseerd.

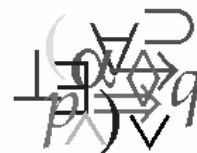
Aanwijzingen:

- 1) Mevrouw Rohof geeft geen Aardrijkskunde.
- 2) Niemand zat tegenover een leraar van dezelfde sekse.
- 3) Aan elke lange zijde van de tafel zit een man en een vrouw.
- 4) Degene die Wiskunde geeft, zat niet aan een van de korte zijden van de tafel.
- 5) Mevrouw Holwerda zat aan dezelfde zijde als degene die Filosofie geeft, terwijl de heer Boetje, die tegenover de leraar Geschiedenis zat, zich aan dezelfde zijde bevond als degene die Engels onderwijst.
- 6) De heer Wijkstra, die geen Wiskunde geeft, zat aan de raamzijde.
- 7) De Aardrijkskundeleraar had mevrouw Zwaal als buurvrouw ter linkerzijde. Ze zaten niet aan dezelfde zijde van de tafel.
- 8) De leraar die nog niet is genoemd, is de heer Hegeman. Het nog niet genoemde vak is Maatschappijleer.

RAAM

Om over na te denken:

Welk verband bestaat er tussen deze puzzel en als...dan...-redeneringen?



Huiswerk 3

Huiswerk 3 bestaat uit de volgende twee opdrachten:

- **Huiswerk 3a: De wijze adviseurs**

In de klassenopdracht en in opdracht 10 aan het begin van les 4 heb je gekeken naar de wijze adviseurs. Je hebt daar de situatie beschreven als er één adviseur een zwarte stip had en als er twee adviseurs een zwarte stip hadden. Maar hoe zit het met drie zwarte stippen? Geef in Brainbox een duidelijke beschrijving bij drie adviseurs met een zwarte stip hoe de adviseurs weten wie een zwarte stip heeft. Geef onder andere antwoord op de volgende vragen:

- Wat ziet/weet een adviseur met een zwarte stip?
- Wat ziet/weet een adviseur met een witte stip?
- Wanneer stappen er adviseurs naar voren?

- **Huiswerk 3b: Uitgaan**

Los de onderstaande puzzel op. Geef in Brainbox duidelijk aan hoe je aan je oplossing gekomen bent.

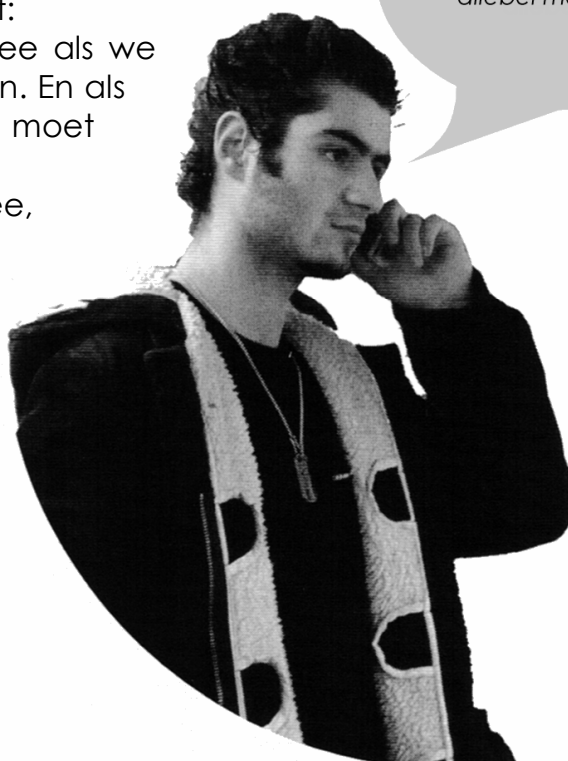
Petra wil vrijdagavond uitgaan en belt haar vrienden met de vraag wie er zin heeft om mee te gaan. De vrienden hebben allemaal zo hun eisen. Dit zijn de antwoorden die Petra krijgt:

Marieke: 'Ja, ik wil wel mee als we minimaal met z'n drieën zijn. En als Omar meegaat, dan moet Natasja ook meegaan.'

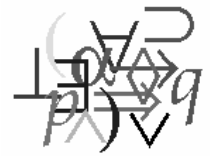
Natasja: 'Ja, ik ga mee, maar alleen als Omar én Marieke ook meegaan.'

Omar: 'Ik ga mee, maar niet als Marieke en Natasja allebei meegaan.'

Wie gaan er op stap en wie blijven er thuis?



*Ik ga mee,
maar niet als
Marieke en Natasja
allebei meegaan.*



Les 6: Formules in de Propositielogica

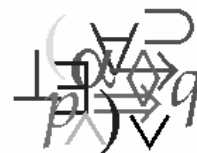
De afgelopen lessen heb je al verschillende beweringen bekeken. Ook hebben we gezien dat we beweringen konden combineren. Van de beweringen 'een kaart in het rijtje is groen' en 'de vorige kaart in het rijtje is groen' hebben we bijvoorbeeld gemaakt: '**Als** een kaart in het rijtje groen is, **dan** is de vorige kaart in het rijtje ook groen.' Als-dan verbindt de twee beweringen en noemen we een connectief. Andere connectieven die we al gezien hebben zijn: 'en', 'of', 'niet' en 'juist dan als'. Laten we de symbolen voor deze connectieven eens op een rijtje zetten.

Symbool:	Uitspraak:
$\dots \wedge \dots$	$\dots$ en $\dots$
$\dots \vee \dots$	$\dots$ of $\dots$
$\neg \dots$	niet- $\dots$
$\dots \Rightarrow \dots$	als $\dots$, dan $\dots$
$\dots \Leftrightarrow \dots$	$\dots$ juist dan als $\dots$

Deze symbolen gaan we gebruiken om beweringen om te zetten naar formules van de Propositielogica ('uitsprakenlogica'). De waarheid van zo'n formule kunnen we vervolgens met een waarheidstabel bepalen. We gaan dus praten in de taal van de Propositielogica. Bij de connectieven 'en' en 'of' moeten we oppassen. In de gewone taal geeft 'en' vaak, naast de samenvoeging van twee deelbeweringen, ook een tijdsvolgorde aan. De gebeurtenis uit de tweede zinshelft vindt dan later plaats dan de gebeurtenis uit de eerste zinshelft. Een tweetal voorbeelden:

- Femke **en** Lotte komen naar het feest.
- Pieter kwam de kamer binnen **en** deed het licht aan.

In de eerste zin staan de deelbeweringen 'Femke komt naar het feest' en 'Lotte komt naar het feest' op zichzelf. Dit 'en' (oftewel: $\wedge$) gebruiken we in de Propositielogica. In de tweede zin volgen de twee deelbeweringen 'Pieter kwam de kamer binnen' en 'Pieter deed het licht aan' op elkaar. Dit tijds-element kunnen we niet in de Propositielogica uitdrukken.



Het connectief 'of' kan ook voor verwarring zorgen. In het Nederlands heeft 'of' namelijk twee betekenissen. Kijk maar eens naar de volgende twee voorbeelden:

- Kinderen hebben alleen toegang met hun vader **of** hun moeder.
- Voor je verjaardag krijg je een iPod **of** nieuwe schoenen.

De zinnen kun je als volgt herschrijven:

- Kinderen hebben alleen toegang met hun vader **en/of** hun moeder.
- Voor je verjaardag krijg je **òf** een iPod **òf** nieuwe schoenen.

In de eerste zin kan een kind alleen met zijn vader, alleen met zijn moeder, maar ook met beide ouders naar binnen. Dit 'of' noemen we het logische 'of' (oftewel: $\vee$). In de vraag: 'Wil je suiker **of** melk in je koffie?' komt de betekenis van dit 'of' nog duidelijker naar voren.

Bij de tweede zin zul je een keuze moeten maken. Het zal niet de bedoeling zijn dat je beide cadeaus krijgt. Dit 'of' noemen we het exclusieve 'of'. In deze lessenserie zullen we alleen het logische 'of' (en/of) bekijken.

Een formule in de Propositielogica bestaat dus uit deelbeweringen/uitspraken die we aangeven met hoofdletters A, B, C, ... en connectieven. Die hoofdletters noemen we propositieletters. Laten we twee van de bovenstaande zinnen eens vertalen naar een formule in de Propositielogica:

1) Nederlandse zin: 'Femke en Lotte komen naar het feest.'

A: Femke komt naar het feest

B: Lotte komt naar het feest

$\wedge$: en

Formule: $A \wedge B$

2) Nederlandse zin:

'Kinderen hebben alleen toegang met hun vader of hun moeder.'

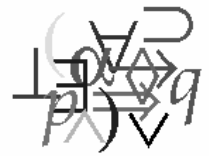
A: kinderen hebben alleen toegang met hun vader

B: kinderen hebben alleen toegang met hun moeder

$\vee$: of

Formule: $A \vee B$





Soms zul je een zin eerst moeten herschrijven voordat je hem kunt vertalen naar een formule. Een voorbeeld:

- Marloes fietst als haar auto kapot is of als het mooi weer is.

Hier staat dus een als...dan...-bewering:

- Als Marloes' auto kapot is of als het mooi weer is, dan fietst Marloes.

We gaan nog een stapje verder:

- **Als** (Marloes' auto kapot is **of** het mooi weer is), **dan** fietst Marloes.

Deze bewering kunnen we uitsplitsen naar de volgende deelbeweringen:

A: Marloes' auto is kapot

B: het is mooi weer

C: Marloes fietst

Met de connectieven voor 'als-dan' ($\Rightarrow$) en 'of' ($\vee$) krijgen we nu de volgende formule:

- $(A \vee B) \Rightarrow C$

Opdracht 22:

Vertaal de onderstaande zinnen naar een formule in de Propositielogica. Geef eerst aan wat de deelbeweringen zijn. Gebruik voor de connectieven de symbolen van pagina 37.

a) Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180° .

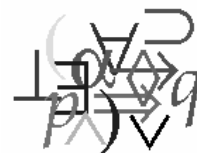
A: _____

B: _____

Formule: _____

b) Kim zit 's ochtends op school of spijbelt.

c) Als ik 'Hoe-oe! Ik ben thuis!' roep en Hans is thuis, dan geeft hij geen antwoord.



- d) Ik heb een witte of een zwarte stip zodra de koning ten minste één zwarte stip schildert.

Vergeet de zin niet eerst te herschrijven!

- e) Als je op het schoolfeest een biertje wilt bestellen, moet je minimaal 16 jaar zijn.

Let op de equivalentie!

- f) Het is niet zo dat Tamara Stefan haat of de rug toekeert.

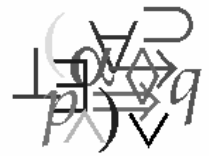
Herschrijf: niet-(_____)

P: _____

Q: _____

Formule: _____

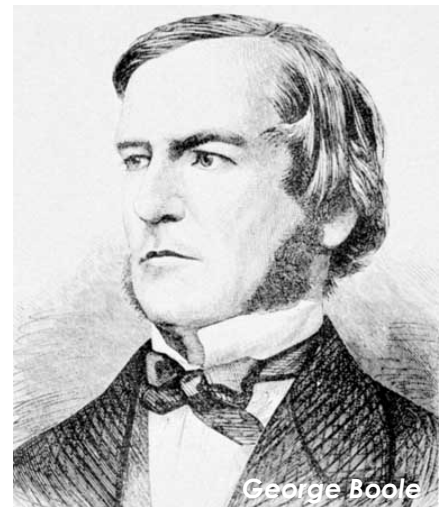
- g) Het is niet zo dat als Philip de tafel heeft gedekt, hij niet hoeft af te wassen of af te drogen.



Les 7: Waarheidstabellen

In de vorige les hebben we beweringen omgeschreven naar formules in de Propositielogica. Aan zo'n formule kun je vaak niet in een keer zien wanneer zij een ware bewering oplevert. De waarheidstabellen zijn hiervoor een mooi instrument.

In de waarheidstabellen gaan we rekenen met de waarheidswaarden 0 (= onwaar) en 1 (= waar). De Engelsman George Boole (1815-1864) was hiervan de bedenker. Boole verbond in veel van zijn boeken de wereld van de Logica met de Wiskunde. Zijn wiskundige kennis heeft hij daarbij vooral met zelfstudie opgebouwd. De Booleaanse algebra's worden ook nu nog in verschillende wiskundige disciplines gebruikt. Ook vormen ze een belangrijk fundament voor logische schakelingen in computers.



George Boole

In de eerste les hebben we al gezien dat een bewering waar of onwaar kan zijn. Deelbewering A, B, C, ... kunnen dus ook waar (1) of onwaar (0) zijn. Maar wat gebeurt er met de waarheidswaarden als we deelbeweringen samenvoegen met de connectieven?

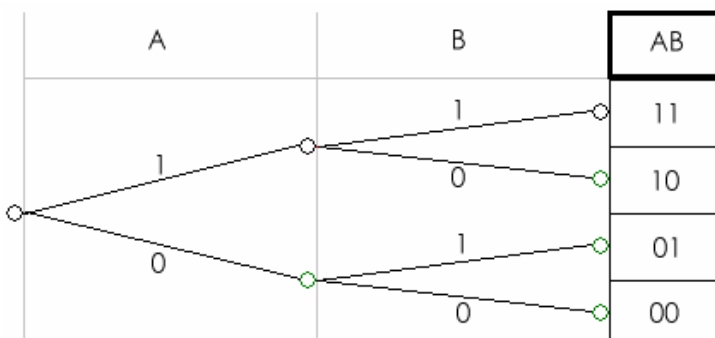
en ($\wedge$)

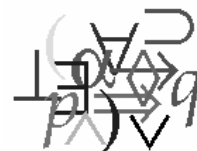
$A \wedge B$ is alleen waar als zowel A als B waar is. Kijk nog maar eens naar het voorbeeld: 'Femke en Lotte komen naar het feest.' Deze bewering is alleen waar als zowel Femke als Lotte naar het feest komt.

Hiernaast zie je de waarheidstabel voor 'en'. We moeten hiervoor $2 \times 2 = 4$ mogelijkheden bekijken, zoals je hieronder in het boomdiagram kunt aflezen.

Waarheidstabel voor 'en':

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0





of ($\vee$)

$A \vee B$ is in drie van de vier gevallen waar. Alleen als zowel A als B onwaar is, is $A \vee B$ onwaar. Kijk nog maar eens naar het voorbeeld: 'Kinderen hebben alleen toegang met hun vader of hun moeder.' Een kind mag alleen niet naar binnen als zowel zijn vader als zijn moeder niet meegaat.

Waarheidstabel voor 'of':

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Waarheidstabel voor 'niet':

A	$\neg A$
1	0
0	1

niet ($\neg$)

$\neg A$ geeft de ontkenning van A . Wat waar is, wordt onwaar. Wat onwaar is, wordt waar.

als..., dan... ($\Rightarrow$)

In opdracht 17 en 18 heb je al gezien dat je moet oppassen bij als...dan...-beweringen. $A \Rightarrow B$ is natuurlijk waar als zowel A als B waar is. Maar $A \Rightarrow B$ is ook waar als A onwaar is! Je kunt je misschien het beste afvragen: 'Wanneer lieg ik in ieder geval niet?' Probeer dat maar eens bij het volgende voorbeeld: 'Als je friet met een hamburger bestelt, dan raad ik je de hamburgerschotel aan.' Ik lieg dan alleen als je wél friet met een hamburger bestelt, maar ik je géén hamburgerschotel aanraad.

Waarheidstabel voor 'als..., dan...':

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Waarheidstabel voor 'juist dan als':

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

juist dan als ($\Leftrightarrow$)

Voor $A \Leftrightarrow B$ (equivalentie) moet $A \Rightarrow B$ gelden, maar ook $B \Rightarrow A$.

$A \Leftrightarrow B$ is dus alleen waar als A en B beide waar zijn en als A en B beide onwaar zijn.



 Opdracht 23:

a) Vul voor de formule $\neg\neg A$ de onderstaande waarheidstabel in.

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
1		
1		
0		
0		

b) Dus: $\neg\neg A \Leftrightarrow$ _____ (wet van de dubbele negatie)

c) Vul voor de formule $\neg(A \wedge B)$ de onderstaande waarheidstabel in.

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

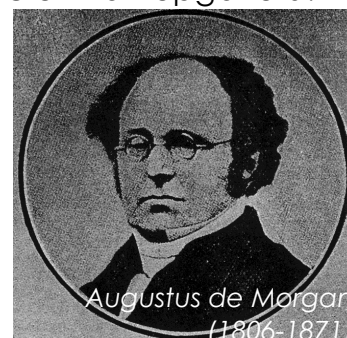
d) Vul voor de formule $\neg A \vee \neg B$ de onderstaande waarheidstabel in.

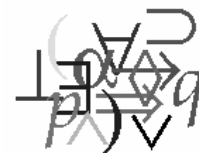
A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

e) Kijk nog eens naar de laatste kolom van opgave c en van opgave d.

Hieruit volgt: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow$ _____

(wet van De Morgan).





Opdracht 24:

In opdracht 15 heb je vier beweringen bij de regel van de kaartjes 'Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.' bekeken. Je hebt daarbij de schrijfwijze al verkort met de implicatiepijl. We gaan die vier beweringen in deze opdracht in waarheidstabellen verwerken. Noem:

A: een kaart is rood ($\boxed{R}$)

B: het ernaast gelegen kaartje is rood ($\boxed{\dots} \boxed{R}$)

a) Vul de volgende zinnen aan:

In plaats van een kaart is groen ($\boxed{G}$), kunnen we schrijven: een kaart is niet-rood, oftewel: _____. (Gebruik het symbool voor niet.)

In plaats van het ernaast gelegen kaartje is groen ($\boxed{\dots} \boxed{G}$), kunnen we schrijven: _____, oftewel: _____.

b) Herschrijf de vier beweringen naar formules met A en B. Maak daarbij gebruik van de symbolen voor de connectieven.

1) $\boxed{R} \Rightarrow \boxed{\dots} \boxed{R}$ wordt _____

2) $\boxed{\dots} \boxed{G} \Rightarrow \boxed{G}$ wordt _____

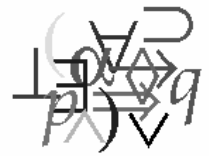
3) $\boxed{G} \Rightarrow (\boxed{\dots} \boxed{R} \text{ of } \boxed{\dots} \boxed{G})$ wordt _____

4) $\boxed{\dots} \boxed{R} \Rightarrow (\boxed{R} \text{ of } \boxed{G})$ wordt _____

c) Vul de onderstaande waarheidstabellen in voor 1) en 2).

1)		
A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

2)		
A	B	



Bij de tweede waarheidstabel werd het al lastig om die uit je hoofd in te vullen. Laten we daarom bij de derde bewering naar een handig systeem gaan kijken.

De derde bewering heb je in opdracht 24 herschreven tot: $\neg A \Rightarrow (B \vee \neg B)$. Deze bewering bestaat uit twee deelbeweringen. Hierdoor zijn er vier mogelijkheden die we moeten onderzoeken. Onderstaande stappen zijn in de waarheidstabel met cursieve nummers aangegeven:

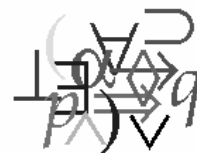
- 1) Begin je waarheidstabel altijd met links de propositieletters en rechts de formule.
- 2) Zet onder de propositieletters alle mogelijke combinaties van waarheidswaarden.
- 3) Schrijf deze waarheidswaarden over onder de letters in de formule.
- 4) Bepaal nu de waarheidswaarden van de rest van de formule. Begin daarbij met de kleinste deelformules. Let op de haakjes; die krijgen ook in de Propositielogica voorrang.
In dit voorbeeld beginnen we dus met $\neg$ van $\neg A$ en $\neg B$.
- 5) Vervolgens is $\vee$ aan de beurt. Het gaat hier om de 'of' van de kolommen direct voor en na het $\vee$ -symbool.
- 6) Als laatste de implicatie. Het gaat hier om de implicatie tussen de kolom $\neg$ van $\neg A$ en de kolom $\vee$ van $(B \vee \neg B)$.

Waarheidstabel:

↓ letters:		↓ formule: $\neg A \Rightarrow (B \vee \neg B)$							
A	B	$\neg A$	$\neg B$	$B \vee \neg B$	$\neg A \Rightarrow (B \vee \neg B)$				
1	1	0	1	1	1	0	1		
1	0	0	1	0	1	1	0		
0	1	1	0	1	1	1	0		
0	0	1	0	0	1	1	0		
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑		
2	2	4	3	6	3	5	4	3	



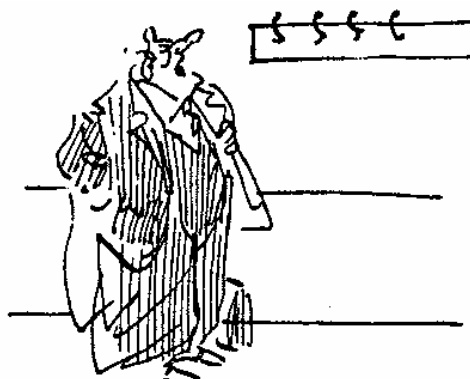
Gelukkig verschijnen er hier in de vetgedrukte kolom alleen maar 1-tjes. We weten namelijk al dat het niet uitmaakt of er na een groene kaart een rode of een groene kaart volgt. Deze bewering is dus voor elke combinatie van A en B waar! Een uitspraak die altijd waar is noemen we een tautologie. De eenvoudigste tautologieën zijn van de vorm $P \Rightarrow P$. Neem voor P bijvoorbeeld 'ik praat'. Dan krijg je: 'Als ik praat, dan praat ik'. Zie daar nog maar eens een speld tussen te krijgen!



Opdracht 25:

- a) Probeer de waarheidstabel voor de vierde bewering uit opdracht 24 nu zelf in te vullen.

- b) Is deze bewering een tautologie? Verklaar je antwoord.



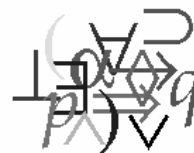
"HOE-OE!
IK BEN THUIS!"

Opdracht 26:

Kijk nog eens naar je formule bij opdracht 22c, die hoort bij de bewering:
'Als ik 'Hoe-oe! Ik ben thuis!' roep en Hans is thuis, dan geeft hij geen antwoord.'

- a) Neem deze formule hier over: _____
- b) Uit hoeveel deelbeweringen bestaat deze formule? _____
- c) Hoeveel waarheidswaarden kan elke propositieletter hebben? _____
- d) Hoeveel mogelijkheden moeten we dus onderzoeken?

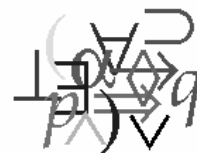
- e) Vul de waarheidstabel op de volgende bladzijde in.



f) In welk(e) geval(len) verschijnt er een 0 onder de implicatiepijl?
Verklaar je antwoord.

g) Is deze bewering een tautologie? Verklaar je antwoord.





 Opdracht 27:

Kijk nog eens naar je formule bij opdracht 22g, die hoort bij de bewering:

'Het is niet zo dat als Philip de tafel heeft gedekt, hij niet hoeft af te wassen of af te drogen.'

a) Neem deze formule hier over: _____

b) Maak bij deze formule een waarheidstabel.

c) Wanneer is deze bewering waar?

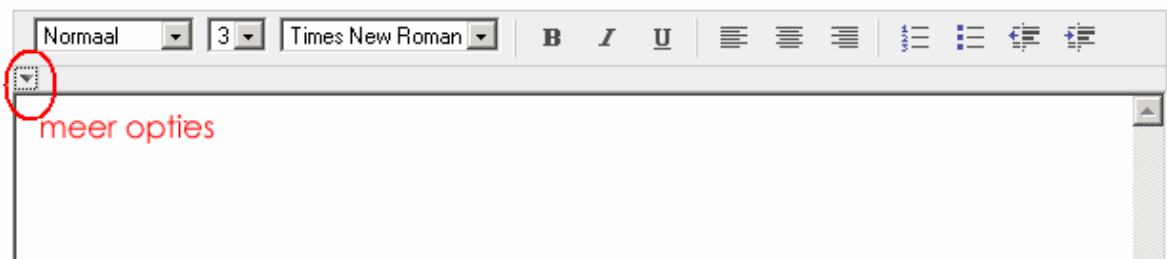
Huiswerk 4

Huiswerk 4 bestaat uit de volgende opdracht:

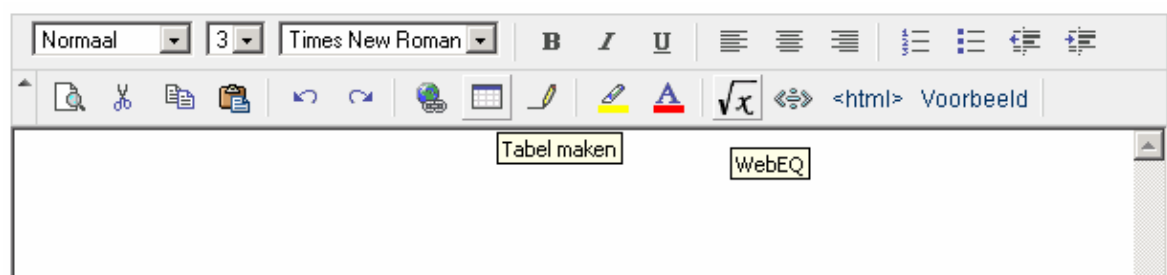
- **Huiswerk 4: Propositielogica**

In deze Brainboxopdracht word je gevraagd zelf een bewering met minimaal twee connectieven te verzinnen. Vervolgens ga je jouw bewering vertalen naar een formule in de Propositielogica en op waarheid onderzoeken met behulp van een waarheidstabel. Houd dit boekje bij de hand, want je zult af en toe iets terug moeten zoeken.

In deze opdracht zul je in Brainbox de vergelijkingseditor 'WebEQ' en de optie 'Tabel maken' nodig hebben. Hieronder staan schermafbestanden van deze functies.



Door op het pijltje onder de tekstopies te klikken verschijnen er meer opties.



'Tabel maken' en 'WebEQ'.

Op de volgende pagina vind je hiervan schermafbestanden.

Vergelijking bewerken:

Naam van vergelijking:

Tekengrootte: Breedte aanpassen: Hoogte aanpassen:

Powered by WebEQ™

Hierboven zijn de symbolen voor de connectieven omcirkeld. Propositieletters kun je gewoon met het toetsenbord intypen. Het kan soms even duren voordat 'WebEQ' geladen is.

1 Tabeleigenschappen

Rijen

Kolommen

Tabelkenmerken

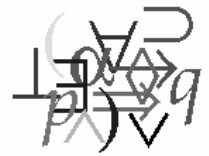
Celkenmerken

Bijschrift

2 Verzenden

Klik op **Verzenden** om te voltooien. Klik op **Annuleren** om af te sluiten.

Vul het aantal rijen en kolommen in en druk op 'Verzenden' om een tabel in te voegen. De Tabelkenmerken hoef je niet te veranderen.



Les 8: Tot slot

In huiswerk 3 heb je de onderstaande puzzel informeel opgelost. Laten we eens kijken of we met onze kennis over formules en waarheidstabellen diezelfde puzzel nu formeel met behulp van de Propositielogica kunnen oplossen.

Petra wil vrijdagavond uitgaan en belt haar vrienden met de vraag wie er zin heeft om mee te gaan. De vrienden hebben allemaal zo hun eisen. Dit zijn de antwoorden die Petra krijgt:

Marieke: 'Ja, ik wil wel mee als we minimaal met z'n drieën zijn. En als Omar meegaat, dan moet Natasja ook meegaan.'

Natasja: 'Ja, ik ga mee, maar alleen als Omar én Marieke ook meegaan.'

Omar: 'Ik ga mee, maar niet als Marieke en Natasja allebei meegaan.'

Petra wil sowieso uitgaan en laat zich leiden door de eisen van haar vrienden. Laten we daarom de vrienden van Petra de volgende propositieletters geven:

M: Marieke

N: Natasja

O: Omar

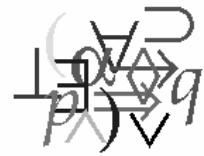
Marieke, Natasja en Omar zijn equivalent met hun eisen. Door deze eisen om te zetten in formules, kunnen we met een waarheidstabel op zoek gaan naar de situatie waar aan alle drie de eisen is voldaan.

Marieke is equivalent met de eis: 'Als Omar meegaat, dan moet Natasja ook meegaan.' Korter: 'Als Omar, dan Natasja.' Door Marieke hieraan equivalent te stellen en de drie eisen samen te bekijken, kunnen we het stukje 'minimaal met z'n drieën' buiten beschouwing laten.

In formulevorm: $M \Leftrightarrow (O \Rightarrow N)$.



$$M \Leftrightarrow (O \Rightarrow N)$$



 Opdracht 28:

- a) Geef op dezelfde manier de formules bij de eisen van Natasja en Omar.

Laat je formules voordat je verder gaat door de docent controleren.

- b) Vul de waarheidstabel verder in.

M	N	O	$M \Leftrightarrow (O \Rightarrow N)$		
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

- c) Hoe kun je nu aflezen met wie Petra op stap gaat? Verklaar je antwoord.

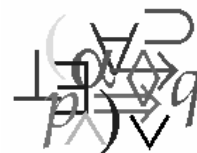


In de vorige opdracht heb je gekeken naar de situatie wanneer alle drie de formules waar zijn. We hebben dus de 'en' genomen van die drie formules. Met de waarheidstabel kon je zo de oplossing snel aflezen.

Hiermee zijn we aan het einde gekomen van deze lessenserie. Centraal stonden de als...dan...beweringen. Je hebt als...dan... gebruikt bij de kaartjes, bij verschillende beweringen, bij (meetkundige) bewijzen, bij de wijze adviseurs, bij verdraaide redeneringen en bij Hopelijk heb je onthouden dat in het Nederlands de woorden **als** en **dan** in als...dan...-beweringen lang niet altijd zichtbaar zijn.

De Propositielogica heeft je uiteindelijk met de waarheidstabellen een handig hulpmiddel gegeven om ingewikkelde problemen eenvoudig te kunnen oplossen. Ook daar moest je bij de waarheidstabel voor $\Rightarrow$ (als..., dan...) oppassen! Doe er je voordeel mee.





Extra opgaven

Opdracht 29:

- a) Vul voor de formules $\neg(A \vee B)$ en $\neg A \wedge \neg B$ de onderstaande waarheidstabel in.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$

- b) Welke conclusie kun je nu trekken?

- c) Laat met behulp van een waarheidstabel zien dat de volgende twee formules equivalent zijn:

$$A \Leftrightarrow B \text{ en } (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

- d) Laat met behulp van een waarheidstabel zien dat de volgende twee formules equivalent zijn:

$$P \Rightarrow Q \text{ en } \neg Q \Rightarrow \neg P$$

- e) Laat met behulp van een waarheidstabel zien dat de volgende formule een tautologie is:

$$P \Rightarrow P$$

- f) Laat met behulp van een waarheidstabel zien dat de volgende formule een tautologie is:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Opdracht 30:

De koning van een ver land heeft met zijn dienaar het idee opgevat om zijn gevangenen logische puzzels te laten oplossen. Een gevangene krijgt de keuze om een van de twee deuren te openen. Achter de ene deur zit een prinses, achter de andere deur zit een tijger. Als een gevangene goed logisch kan redeneren en de deur met de prinses weet te openen, dan blijft hij leven en mag hij met haar trouwen. Doet hij de verkeerde deur open, dan wordt hij ten prooi geworpen aan de tijger.



Los de onderstaande puzzels eerst informeel op. Probeer vervolgens je antwoord met een waarheidstabel te controleren.

- a)** Een van de onderstaande uitspraken is waar. De andere niet.
Welke deur moet de gevangene kiezen?

Deur 1: In deze kamer zit een prinses en in de andere kamer zit een tijger.

Deur 2: In een van de twee kamers zit een prinses en in de andere een tijger.

- b)** Onderstaande uitspraken zijn beide waar of beide onwaar.
Welke deur moet de gevangene kiezen?

Deur 1: In minstens één van de twee kamers zit een prinses.

Deur 2: In de andere kamer zit een tijger.

- c)** Onderstaande uitspraken zijn beide waar of beide onwaar.
Welke deur moet de gevangene kiezen?

Deur 1: Een of twee van de volgende uitspraken zijn waar:

- Er zit een tijger in deze kamer.
- Er zit een prinses in de andere kamer.

Deur 2: In de andere kamer zit een prinses.

 Opdracht 31:

In Kitty's huis lopen nogal wat katten rond.

Zeven katten eten geen Kitkat.

Zes katten eten geen KatDiner.

Vijf katten eten geen FreshFood.

Vier katten eten noch Kitkat noch FreshFood.

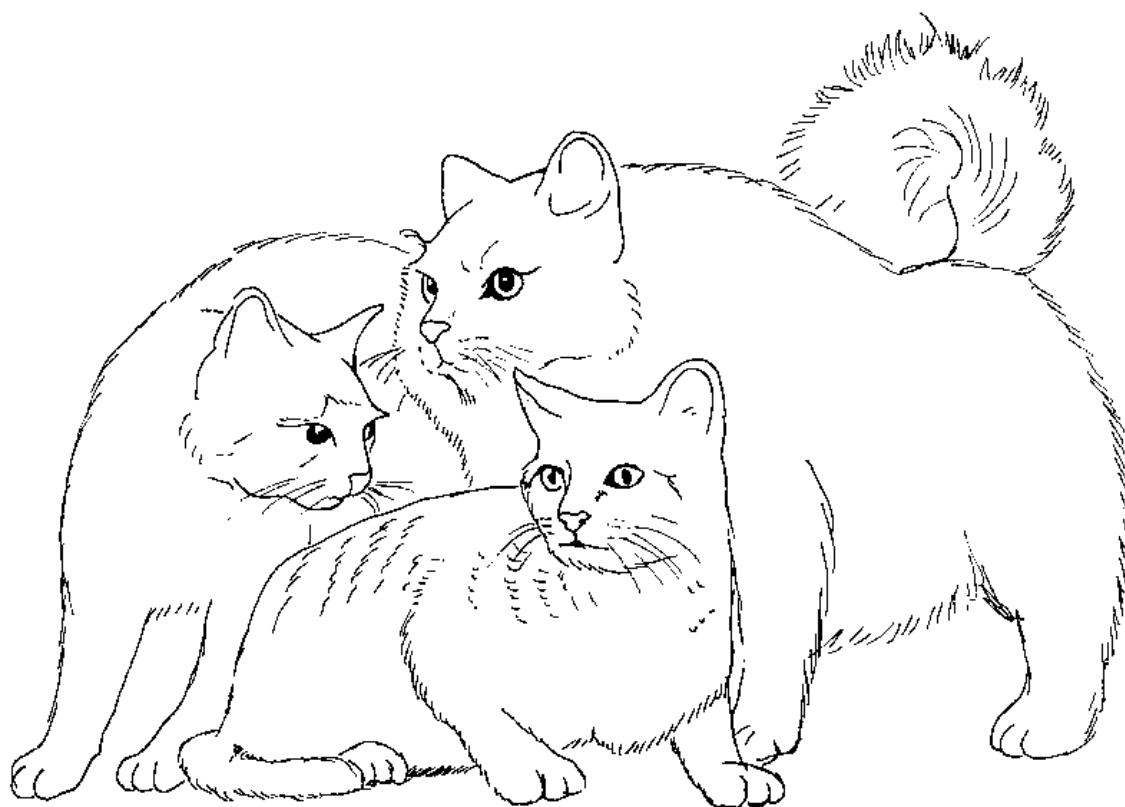
Drie katten eten noch Kitkat noch Katdiner.

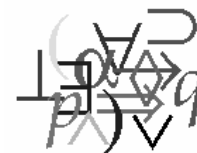
Twee katten eten noch Katdiner noch FreshFood.

Eén kat eet noch Kitkat, noch Katdiner, noch Freshfood.

Geen enkele kat eet alle drie de soorten kattenvoer.

Hoeveel katten heeft Kitty?

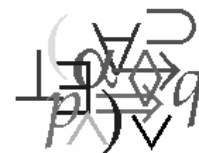




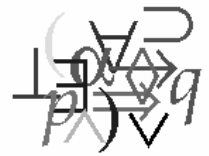
Lijst met afbeeldingen

Pagina: Bron:

- koptekst "Symbols." University of Minnesota Duluth. 30 maart 2006
<<http://www.d.umn.edu/~dcole/logic1.gif>>.
1. Straaten, Peter van. "Wie beweert moet bewijzen." Leren argumenteren met Vader en Zoon. 68.
 3. "Creatief denken." School voor de toekomst. 31 maart 2006
<http://www.svdt.org/wegwijzer/images/IMG_creatiefdenken.jpg>.
 4. "Gottlob Frege." Stanford Encyclopedia of Philosophy. 31 maart 2006
<<http://plato.stanford.edu/entries/frege/frege.jpg>>.
 4. "Alan Turing." Artificial Intelligence: A Modern Approach. 31 maart 2006
<<http://aima.cs.berkeley.edu/graphics/turing.jpg>>.
 9. "Opinie & Debat." NRC Handelsblad 1 april 2006: 15.
 13. Bolland, Hilbert. Getal & Ruimte 3V1. 59.
 15. "Vier." RekenWeb. 7 april 2006
<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/ei/21_1/images/wortel.gif>.
 18. "Standbeeld." Homepage. 8 april 2006
<<http://www.poesiealbums.com/versjes/Samos-2004.jpg>>.
 19. "Koninkrijk Babylonië." Microsoft Encarta Encyclopedie Winkler Prins.
 22. "De wijze adviseurs." Logica 3: Model, Oneindigheid en Paradox.
 24. "Dominoeffect." Bewijzen, bronnencursus 'bewijzen' LP de postkamer. 37.
 26. Straaten, Peter van. "Wie beweert moet bewijzen." Leren argumenteren met Vader en Zoon. 68.
 27. Straaten, Peter van. "Redeneringen kunnen niet op hun kop staan." Leren argumenteren met Vader en Zoon. 96.
 28. Browne, Chris. "Hagar the Horrible." Homepage. 14 april 2006
<<http://members.aol.com/lshauser/hagor1.html>>.
 32. "Weerkaart – sneeuw." Homepage. 14 april 2006
<http://www.frokkieenlola.nl/images/werkbladen/pdf_werkbladen/weerkaart_zw.pdf>.

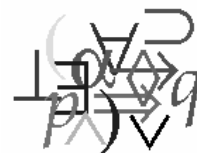


- 33. "Onderzoeksmedicatie." Janssen-Cilag. 14 april 2006
<<http://www.janssen-cilag.nl/content/backgrounders/janssen-cilag.nl/KO03.gif>>.
- 36. "Omar." Pythagoras 43.3: 12.
- 38. "Verjaardag-liedjes." Homepage. 1 mei 2006
<<http://www.uitmuntend.de/img/kleurtje/verjaardag.gif>>.
- 41. "George Boole." Saint Michael's College. 2 mei 2006
<<http://cache.eb.com/eb/image?id=6768>>.
- 42. "Logic." Homepage. 2 mei 2006
<<http://members.iinet.net.au/~marshal/Logic.jpg>>.
- 43. "De Morgan." The University of York. 8 mei 2006
<http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/people/de_morgan.gif>.
- 45. "Les vies d'Einstein." Fiami. 3 mei 2006
<<http://www.fiami.ch/EINSTEIN/img/2005-nul.jpg>>.
- 47. "Tegeltje." Elmer.tv. 3 mei 2006
<<http://images.google.nl/images?svnum=10&hl=nl&lr=&q=Lieg+niet+waarheid>>.
- 51. "Mabel/Marieke." Pythagoras 43.3: 13.
- 53. "Blokeinde." Katholieke Universiteit Leuven. 3 mei 2006
<http://www.kuleuven.ac.be/nieuwsbrief/archief/nb03/_img/blok_gr.jpg>.
- 55. "Experiment in Progress" Homepage. 3 mei 2006
<<http://www.syberg.be/zMentaleRuimte/rSys/fotos/fJ1/deur0.jpg>>.
"Tijger." RK Parochie Petrus en Paulus Bergen. 3 mei 2006
<<http://www.rkparochiebergennh.nl/images/tijger.jpg>>.
- 56. "Katten." Moesti! 3 mei 2006
<http://www.moesti.be/images/katten_10.gif>.



Referenties

- Chasiotis, Christos. "From Common Sense to Formal Logic: Use of Logical Games for the Assessment, Investigation and Improvement of Logical Reasoning." Congresbundel 47ste conferentie van CIEAEM. Berlijn: Freie Universität, 1995: 440-47.
- Eemeren, F.H. van, R. Grootendorst en Peter van Straaten. Leren argumenteren met Vader en Zoon. Amsterdam: Contact, 1996.
- Gijswijt, Dion. "Katten, katten en katten." Pythagoras 37.3 (1998): 28.
- Gottschal, Peter, Ed. Filosofie: Een introductie voor atheneum 4. Groningen: Belcampo, 2005.
- Horst, Stephan van der. "Logica - Een kennismaking. Lesbrieft bij LogSim." Informatica in het voortgezet onderwijs. 16 juni 2003. 21 februari 2006 <<http://www.informaticavo.nl/scripts/lesmateriaal.php#29>>.
- Iemhoff, Rosalie, Dick de Jongh en Marco Vervoort. Logika voor AI. Werkboek. Amsterdam: Faculteit NWI Universiteit van Amsterdam, 2002. Homepage. 2 september 2002. 30 december 2005 <<http://staff.science.uva.nl/~vervoort/LAI/werkboek.pdf>>.
- Kooi, Barteld P. Persoonlijk interview. 17 januari 2006.
- Krabbe, Erik C.W. en Phoebe Kradavis. Logica 1: Argument en Dialoog, gevolgd door Parvulae Logicales: Inleiding en Syllogistiek. Groningen: Faculteit der Wijsbegeerte Rijksuniversiteit Groningen, 2005.
- Krabbe, Erik C.W., ed. Logica 3: Model, Oneindigheid en Paradox. Groningen: Faculteit der Wijsbegeerte Rijksuniversiteit Groningen, 2005.
- Renardel de Lavalette, Gerard R. Colloquium. Rijksuniversiteit Groningen. Groningen, 1 december 2005.
- Roberts, Tim S. "A ham sandwich is better than nothing: Some thoughts about transitivity." Australian Senior Mathematics Journal 18.2: 60-64.
- Smullyan, Raymond. The Lady or the Tiger and Other Logical Puzzles. Harmondsworth, Middlesex, England: Penguin Books Ltd, 1982. 24-35.
- Swaen, Marco. Bewijzen, bronnencursus 'bewijzen' LP de postkamer. Amsterdam: Hogeschool van Amsterdam, 1997.
- Swaen Marco. E-mail interview. 25 januari – 1 april 2006.



- Swaen, Marco. "Logisch denken of rekenen." Pythagoras 43.3 (2003): 8-13.
- Swaen, Marco. Telefonisch interview. 24 februari 2006.
- Swart, Harrie de. "Wiskunde, Logica, Bewijzen en Argumenteren." Euclides 81.4 (2006): 206-09.
- Thijsse, Elias. Logica in de praktijk. Schoonhoven: Academic Service, 2000.
- Tiggelaar, Harm. Persoonlijk interview. 29 maart 2006.
- Tolboom, Léon. E-mail interview Brainbox. Januari – april 2006.
- Verbrugge, Rineke. Persoonlijk interview. 3 april 2006.
- Vos, Pauline. Persoonlijk interview. November 2005 – mei 2006.
- Vuijk, R.A.J., et al. Getal & Ruimte 2HV2. Houten: Educatieve Partners Nederland, 1999. 2-12.
- Vuijk, R.A.J., et al. Getal & Ruimte 3V1. Houten: Educatieve Partners Nederland, 2000. 58-63.
- Wansink, Thijs. Concepttest. 20 februari – 5 mei 2006.