

Logica
in de bovenbouw van het vwo

door
Hugo Bronkhorst

Bètawetenschappelijk Onderzoek
Master Educatie en Communicatie in de Wiskunde en Natuurwetenschappen

Dr. Pauline Vos
Prof. Dr. Gerard R. Renardel de Lavalette

19 juni 2006
Rijksuniversiteit Groningen

Woord vooraf

Logica in de bovenbouw van het vwo? Het is mogelijk! Deze scriptie, behorend bij mijn bètawetenschappelijk onderzoek, gaat vooral over de mogelijkheden om in 4 vwo Logica-les te geven. Er is gekeken naar een specifieke doelgroep: de alfa-leerlingen met Wiskunde A. Het daarbij ontwikkelde lespakket is terug te vinden in de bijlage.

Iedereen die een bijdrage aan dit project heeft geleverd wil ik hartelijk bedanken. Zonder hun hulp, begeleiding en samenwerking zou dit niet mogelijk zijn geweest. In het bijzonder wil ik mijn eerste en tweede scriptiebegeleider bedanken, respectievelijk Dr. F.P. Vos (Didactiek en Onderwijsontwikkeling FWN, RuG) en Prof. Dr. G.R. Renardel de Lavalette (Fundamentele Informatica, RuG), voor hun kritische blik en vrijgemaakte tijd. Ook dank ik mijn eerste begeleider voor het geregeld toesturen van bruikbare artikelen.

Voor de samenstelling van het lespakket heb ik diverse experts geraadpleegd: Drs. V.R. Bekkering (docent Filosofie, Praedinius Gymnasium Groningen), Dr. B.P. Kooi (Theoretische Filosofie, RuG), Dr. M.D.G. Swaen (docent Wiskunde, Calandlyceum Amsterdam en Hogeschool van Amsterdam) en Dr. L.C. Verbrugge (Kunstmatige Intelligentie, RuG) hebben met hun adviezen bijgedragen aan een gefundeerd lespakket. Bovendien was ik blij verrast met het toegestuurd materiaal van Dr. M.D.G. Swaen. Het door hem opgespoorde congresstuk is uiteindelijk als een rode draad door de lessenserie verweven.

Verder bedank ik de volgende studenten voor het uittesten van ontwikkeld materiaal tijdens de verschillende ontwerpronden: Tessa Bronkhorst (Psychologie), Karin Volkers (Bewegingswetenschappen) en Thijs Wansink (Accountancy). Thijs Wansink heeft daarbij geen toets, les, opdracht of enquête overgeslagen.

Als laatste wil ik mijn ouders bedanken die mijn studie en keuzes mede mogelijk maken en ondersteunen. Wat deze scriptie betreft nog een bijzonder dankwoord aan mijn moeder die de laatste spelfoutjes er zorgvuldig uit wist te halen.

Hugo Bronkhorst (Groningen, juni 2006)

Inhoudsopgave

Woord vooraf.....	3
Inhoudsopgave.....	4
Hoofdstuk 1: Inleiding.....	7
§ 1.1: Probleemstelling.....	7
§ 1.2: Onderzoeksvragen.....	8
§ 1.3: Methodologie.....	9
§ 1.3.1: Onderzoekscomponenten.....	9
§ 1.3.2: Ontwerpcycli voor het verbeteren van het materiaal.....	10
§ 1.3.3: Randvoorwaarde.....	11
Hoofdstuk 2: Het leren van logisch redeneren.....	15
Hoofdstuk 3: De positie van Logica binnen de schoolvakken.....	21
§ 3.1: Logica bij niet-Wiskunde vakken.....	21
§ 3.2: Logica binnen de Wiskunde.....	24
§ 3.2.1: Vroeger.....	24
§ 3.2.2: Huidige programma's.....	26
§ 3.2.3: Toekomst.....	28
§ 3.3: Vakkenintegratie.....	30
Hoofdstuk 4: Eerste onderzoekscomponent: Pretest (Diagnostische toets).....	31
§ 4.1: Inleiding.....	31
§ 4.2: Selectie toetsvragen.....	31
§ 4.3: Pretest.....	36
§ 4.3.1: Ontwerpcycli voor het verbeteren van de diagnostische toets.....	36
§ 4.3.2: Toetsresultaten 4 vwo.....	36
Hoofdstuk 5: Tweede onderzoekscomponent: Pilot (Lespakket).....	39
§ 5.1: Inleiding.....	39
§ 5.2: Ontwikkeling materiaal.....	39
§ 5.2.1: Bestaand materiaal en literatuur.....	39
§ 5.2.2: Interviews.....	42
§ 5.2.3: Randvoorwaarden.....	45
§ 5.2.4: Keuzes lespakket.....	45
§ 5.3: Pilot.....	46
§ 5.3.1: Ontwerpcycli voor het verbeteren van het lesmateriaal.....	46
§ 5.3.2: Pilot in A4M.....	46
§ 5.4: Lesverloop.....	47
§ 5.5: Mogelijkheden voor leerlingen met Wiskunde B.....	50
Hoofdstuk 6: Derde onderzoekscomponent: Posttest (Eindtoets).....	51
§ 6.1: Verantwoording.....	51
§ 6.2: Resultaten.....	51

Hoofdstuk 7: Vierde onderzoekscomponent: Leerlingenfeedback	57
§ 7.1: Inleiding	57
§ 7.2: Enquête.....	57
§ 7.3: Interviews.....	61
Hoofdstuk 8: Samenvatting, conclusies en aanbevelingen	63
Referenties.....	65
Bijlage A: Diagnostische toets = Eindtoets	69
A1: Export opgaven vanuit Brainbox.....	69
A2: Export feedback (beoordeling) vanuit Brainbox	79
Bijlage B: Studiewijzer / planning leerlingen A4M.....	87
Bijlage C: Lespakket.....	91
C1: Lesmateriaal	91
C2: Export huiswerkopdrachten vanuit Brainbox.....	153
C3: Docentenhandleiding	189
Bijlage D: Enquête: Wat vind je van Logica?.....	195

Hoofdstuk 1: Inleiding

§ 1.1: Probleemstelling

Eén van de doelen van het wiskundeonderwijs in het Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs (vwo) is het analytische vermogen van leerlingen te ontwikkelen c.q. te vergroten. De methodes voor het vak Wiskunde, waaronder *Moderne Wiskunde*, *Getal en Ruimte* en *de Wageningse Methode* (figuur 1), laten leerlingen aan de hand van verschillende typen opgaven onderzoekend en kritisch nadenken. Ook abstract rekenen en logisch redeneren worden daarin gestimuleerd. De docent Wiskunde heeft onder meer als taak dat leer- en denkproces te begeleiden en te bevorderen. Ook kan hij/zij de leerlingen verbanden tussen de leerstof laten inzien.



figuur 1

Met deze doelen in mijn achterhoofd, artikelen uit Euclides [Swart] en eigen ervaringen heb ik een onderzoek naar Logica gestart vanuit de volgende probleemstelling:

Leerlingen in de bovenbouw van het vwo hebben problemen met logisch redeneren.

§ 1.2: Onderzoeksvragen

De probleemstelling uit paragraaf 1.1 is hypothetisch en heb ik aangepakt met een groot project. Dat project werd ingevuld met een toets en een lessenserie. De toets heb ik gebruikt om het ingangsniveau van de leerlingen te bepalen. Aansluitend op dat niveau is vervolgens het logisch redeneren getraind met een lessenserie Logica, waarna de toets nogmaals is afgenomen. Hierdoor kon eventuele verbetering gemeten worden. Bij dit project hoort de volgende hoofdvraag:

- *In hoeverre is het mogelijk om in 4 vwo Logica-les te geven?*

Deze vraag zal vooral beantwoord worden voor de Wiskunde A-leerlingen. Wiskunde A-leerlingen hebben gekozen voor het profiel 'Cultuur & Maatschappij' of 'Economie & Maatschappij'. Ik heb dus gekozen voor een specifieke doelgroep: de alfa-leerlingen. Op het Rölingcollege, locatie Belcampo, was er in mijn eigen vierde klas ruimte in het programma om met Logica aan de slag te gaan.

In de onderzoeksfase voorafgaand aan de lessenserie heb ik allereerst de volgende deelvragen beantwoord:

- *Wanneer en hoe goed kunnen kinderen logisch redeneren?*
→ Hoofdstuk 2
- *Wat is de positie van Logica binnen niet-Wiskunde schoolvakken?*
→ Hoofdstuk 3
- *Wat is de positie van Logica binnen het schoolvak Wiskunde?* → Hoofdstuk 3
- *Wat zijn de mogelijkheden voor eventuele vakkenintegratie?* → Hoofdstuk 3

§ 1.3: Methodologie

§ 1.3.1: Onderzoekscomponenten

Om de hoofdvraag uit paragraaf 1.2 goed te kunnen beantwoorden heeft mijn onderzoek uit vier onderzoekscomponenten bestaan:

1) Pretest: Diagnostische toets

Met behulp van een diagnostische toets (voorkennistoets) werd het niveau van de leerlingen bepaald. In hoofdstuk 4 zal ik de samenstelling en de resultaten van de toets bespreken.

2) Pilot: Lespakket

Na de diagnostische toets kregen de leerlingen met Wiskunde A een lessenserie Logica. Deze lessenserie bestond uit acht lessen. In hoofdstuk 5 zal ik de ontwikkeling van dit materiaal en het lesverloop beschrijven. In de laatste paragraaf van dat hoofdstuk bespreek ik eventuele mogelijkheden voor leerlingen met Wiskunde B.

3) Posttest: Eindtoets

Na de lessenserie maakten de leerlingen nogmaals de diagnostische toets, die ook als pretest is gebruikt, om eventuele vooruitgang te meten. De verantwoording en de resultaten zijn terug te vinden in hoofdstuk 6.

4) Leerlingenfeedback

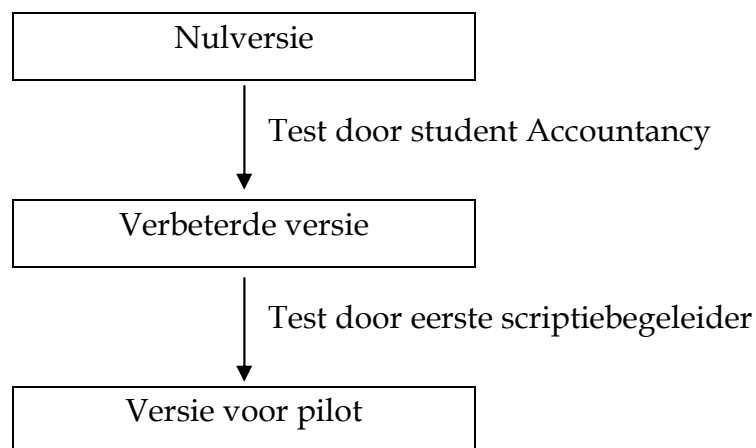
Leerlingenfeedback is van essentieel belang om de hoofdvraag evenwichtig te kunnen beantwoorden. Leerlingen hebben via een enquête antwoord gegeven op de vraag: *‘Wat vind je van Logica?’*

§ 1.3.2: Ontwerpcycli voor het verbeteren van het materiaal

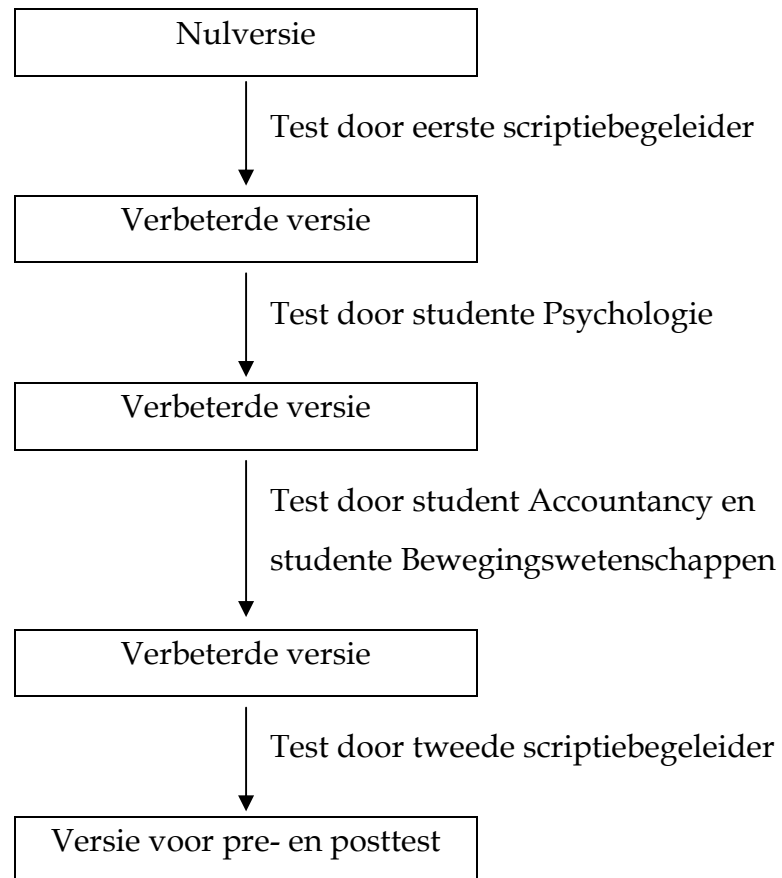
Het materiaal behorend bij elke onderzoekscomponent werd steeds uitgebreid getest via een cyclus van iteratieve verbeteringen. Voor de tweede en vierde onderzoekscomponent werd daarbij het volgende proces doorlopen:

- De nulversie werd door een student Accountancy onder mijn begeleiding doorgewerkt. Hierdoor kon ik direct zien waar eventuele fouten en onduidelijkheden zaten en hierop doorvragen. Ook kon de tijdsduur beter geschat worden.
- De verbeterde versie is vervolgens door mijn eerste scriptiebegeleider vooral vanuit een didactisch oogpunt bekeken.
- Na deze verbeteringen ontstond de versie voor de pilot, die in de klas gebruikt is.

Schema diverse teststadia tweede en vierde onderzoekscomponent:



De eerste les van het lespakket had een extra ontwerpronde. Een universitair hoofddocent Kunstmatige Intelligentie heeft de verbeterde versie bekeken voordat deze naar mijn eerste begeleider ging. Ook de diagnostische toets (eerste onderzoekscomponent) had een aantal extra ontwerpronden, omdat een diagnostische toets absoluut geen fouten of onduidelijkheden mag bevatten. Deze toets is, naast bovengenoemde student, onder begeleiding doorgewerkt door een studente Psychologie en een studente Bewegingswetenschappen. Verder heeft mijn tweede scriptiebegeleider de toets bekeken voordat de toets de klas in ging.

Schema diverse teststadia eerste (en derde) onderzoekscomponent:**§ 1.3.3: Randvoorwaarde**

Een randvoorwaarde bij dit project – het ontwerpen van materiaal en het geven van onderwijs – was mijn eigen kennis van Logica. Voordat ik een diagnostische toets en lesmateriaal kon samenstellen, moest deze kennis op een voldoende hoog niveau zijn. Hieronder staat een overzicht van zelfstudie en colleges die ik gevolgd heb.

Zelfstudie:

- Logica 1 [Krabbe, “Logica 1”]¹

De cursus ‘Logica 1’ wordt gegeven aan eerstejaars studenten Wijsbegeerte. Het dictaat bij deze cursus, dat ik bestudeerd heb, begint met een hoofdstuk ‘argument en dialoog’. Het gaat daarin vooral om standpunten, verschillen van

¹ Literatuurverwijzingen/referenties staan tussen haakjes volgens MLA-stijl [Troyka]. De referenties staan op pagina 65.

mening, argumenteren en discussiëren, het analyseren van een betoog en drogredenen.

Het tweede deel van het dictaat gaat over redeneervormen. Centraal staat de traditionele ‘Categorische Syllogistiek’ (CS) van Aristoteles. In de CS mogen redeneringen geen “lege termen” bevatten: ‘Existentiële Onderstelling’ (EO). Door EO los te laten ontstaat de moderne versie van CS, namelijk CS⁻. Hierdoor kan er bijvoorbeeld ook geredeneerd worden over “het grootste priemgetal” of over “een levend wezen op Mars”.

- Logica 2 [Verbrugge, “Inleiding”; Barwise]

De cursus ‘Logica 2’ wordt gegeven aan tweedejaars studenten Wijsbegeerte en eerstejaars studenten Kunstmatige Intelligentie. In deze cursus staan de Propositie- en Predikatenlogica centraal. Daarnaast is er aandacht voor het softwarepakket ‘Tarski’s World’. Het boek heb ik als naslagwerk gebruikt.

- *Logica in de praktijk* [Thijsse]

Om de colleges ‘Discrete Structuren’ (zie colleges hieronder) beter te kunnen verwerken, heb ik het boekje *Logica in de praktijk* doorgewerkt. Ik heb dit boekje ook gebruikt bij de samenstelling van de lessenserie.

- Delen uit *Gödel, Escher, Bach: een eeuwige gouden band* [Hofstadter]

Aan de hand van Bachs ‘Musikalisches Opfer’ wordt er in dit boek op een vloeiende wijze een verband gelegd tussen Bach, Escher en Gödel. Nieuwe onderwerpen worden steeds geïntroduceerd aan de hand van een dialoog tussen de Schildpad en Achilles. Het boek bestaat uit twee delen. Deel 1 heb ik in zijn geheel gelezen, omdat hierin naar de Propositielogica wordt toegewerkt. Deel 2 heb ik alleen globaal bekeken.

Colleges:

- Colloquium Logica [Renardel]

In dit colloquium werd een geschiedkundig overzicht van de Logica gegeven. Ook werd er kort verwezen naar Modale, Dynamische en Epistemische Logica. Ook in het lespakket heb ik aandacht besteed aan stukjes geschiedenis.

- Discrete Structuren [Ross]

De cursus 'Discrete Structuren' wordt door Prof. G.R. Renardel gegeven aan eerstejaars studenten Informatica. Ik heb tijdens de tweede periode van dit collegejaar (2005/2006) de hoorcolleges en een aantal werkcolleges gevolgd. Voor mij waren hierbij de colleges over Logica van belang: Propositie- en Predikatenlogica. In de colleges werd ook aandacht besteed aan logische netwerken en Booleaanse Algebra's. De tentamenopgaven over het Logica-gedeelte heb ik per e-mail gemaakt.

- Logica 3 [Krabbe, "Logica 3"]

De cursus 'Logica 3' wordt door Prof. E.C.W. Krabbe als keuzevak aan derde- en vierdejaars studenten Wijsbegeerte gegeven. Ik heb tijdens de tweede periode van dit collegejaar de hoorcolleges gevolgd. De cursus had geen werkcolleges. De colleges begonnen met een herhaling van verzamelingentheorie. Al snel kwamen relaties en functies om de hoek kijken waarop oneindigheid volgde. Ook de driewaardige Logica van Ulrich Blau is behandeld. Veel aandacht was er voor allerlei paradoxen, waaronder de Russell-paradox, de Cantor-paradox en de leugenaarsparadox.

In de cursus kwam ook een stukje Modale Logica aan de orde, maar vooral de Semantiek van de Predikatenlogica was een belangrijk onderwerp. Vanwege een gat in mijn voorkennis bij aanvang van de colleges, lag het tempo en niveau hiervan voor mij wat aan de hoge kant. Wel heb ik een breed overzicht van Logica gekregen. In de lessenserie voor 4 vwo heb ik echter alleen naar de Propositielogica toegewerkt.

Logische puzzels:

Om een overzicht te krijgen van logische vraagstukken heb ik onder andere de volgende artikelen en boeken bekeken:

- *“A ham sandwich is better than nothing: Some thoughts about transitivity”* [Roberts]
Dit artikel bekijkt de transitieve relatie en haar betekenis in het dagelijks leven. Een relatie R is transitief op een verzameling A juist dan als voor alle $a, b, c \in A$ geldt: $((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R)$.
- *“Always, sometimes or never true?”* [Swan]
Wiskundige beweringen zijn aan congresdeelnemers voorgelegd. De deelnemers moesten aangeven of de bewering altijd waar is, soms waar is of altijd onwaar is. Een duidelijke toelichting mocht natuurlijk niet ontbreken. Een voorbeeld: “Als ik u van een figuur de omtrek en de oppervlakte geef, dan kunt u de vorm tekenen.” Vergelijkbare problemen kunnen eventueel in de klas gebruikt worden.
- *“Speltheorie en Logica”* [Ditmarsch]
In dit artikel wordt een verband gelegd tussen de Speltheorie en (Kennis)Logica. De auteurs beschrijven zowel voorbeelden van de invloed die besluitvormingstheorie op Logica heeft als voorbeelden van Logica op besluitvormingstheorie.
- *“With & About Logic. In Hell with Raymond Smullyan”* [Tymoczko 294-312]
In deze paragraaf uit *Sweet Reason* staat oneindigheid via concrete puzzels en paradoxen centraal. Dit artikel sluit aan bij de colleges Logica 3 [Krabbe, “Logica 3”].
- Delen uit:
 - *Gotcha. Paradoxes to puzzle and delight* [Gardner]
 - *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel* [Smullyan, “Forever”]
 - *The Lady or the Tiger?* [Smullyan, “Lady”]
 - *To Mock a Mockingbird* [Smullyan, “Mock”]
 - *What is the Name of this Book?* [Smullyan, “What”]
 - *Math Hysteria. Fun and games with mathematics* [Stewart]

Hoofdstuk 2: Het leren van logisch redeneren

Onder ons schedeldak zijn de hersenen actief. Logisch redeneren is een cognitieve activiteit en vindt daar dus plaats. De hersenen zijn te verdelen in een linker- en rechterhersenhalft. Deze helften werken goed samen, maar vaak is één van de twee wel beter ontwikkeld. Naast analytisch vermogen en numerieke vaardigheden vallen ook logica en taalbegrip onder de linkerhersenhalft. Ter vergelijking: functies van de rechterhersenhalft zijn bijvoorbeeld ruimtelijk inzicht, praktische intelligentie en het waarnemen van het globale beeld [Links].

Kinderen ontwikkelen vanaf hun geboorte vaardigheden op allerlei gebieden. Vanaf het vijfde levensjaar begint het kind met logisch redeneren en denken. Om het begrip van de logische implicatie – de zogenaamde als...dan...-beweringen – te meten, hebben Thomas C. O'Brien, Bernard J. Shapiro en Norma C. Reali leerlingen uit *grade* 4, 6, 8 en 10 uit de Verenigde Staten onderzocht [O'Brien].² Dat zijn kinderen tussen de 8 en 15 jaar. De leerlingen werd gevraagd in stripverhaaltjes een vraag met 'ja', 'nee' of 'dat kun je niet weten' te beantwoorden. De beweringen in de stripverhaaltjes stonden in één van de volgende vier vormen:

1) modus ponens (bevestigende modus):

Als ik een blauwe kaart laat zien, dan laat jij een rode kaart zien.

Ik laat een blauwe kaart zien.

Laat jij een rode kaart zien?

'Ja', 'Nee', 'Dat kun je niet weten'

2) modus tollens (ontkennende modus):

Als ik een blauwe kaart laat zien, dan laat jij een rode kaart zien.

Jij laat geen rode kaart zien.

Liet ik een blauwe kaart zien?

'Ja', 'Nee', 'Dat kun je niet weten'

² Grade 4, 6, 8 en 10 uit de Verenigde Staten komt overeen met respectievelijk groep 6, groep 8 (basisonderwijs), klas 2 en klas 4 (voortgezet onderwijs) in Nederland.

3) ontkenning (van het argument achter als):

Als ik een blauwe kaart laat zien, dan laat jij een rode kaart zien.

Ik laat geen blauwe kaart zien.

Laat jij een rode kaart zien?

'Ja', 'Nee', 'Dat kun je niet weten'

4) omgekeerde:

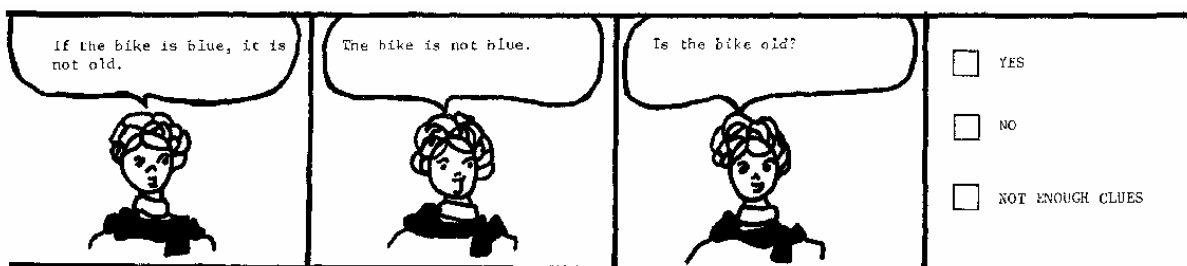
Als ik een blauwe kaart laat zien, dan laat jij een rode kaart zien.

Jij laat een rode kaart zien.

Liet ik een blauwe kaart zien?

'Ja', 'Nee', 'Dat kun je niet weten'

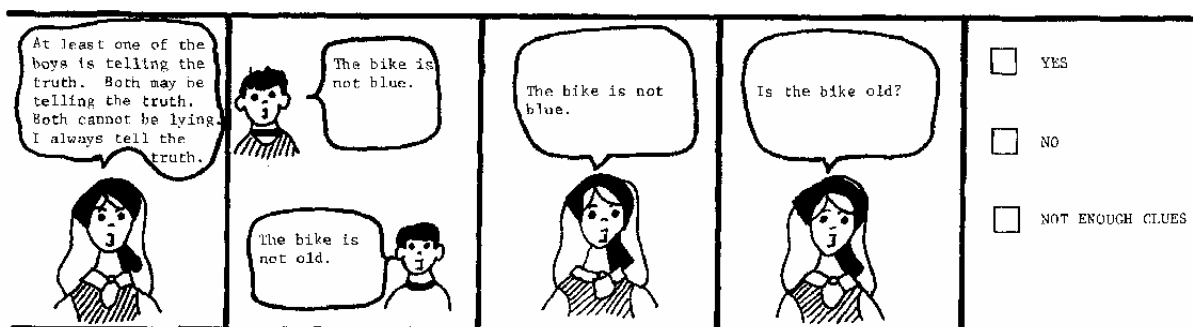
In figuur 2 staat een voorbeeld van een stripverhaaltje.



figuur 2

De onderzoekers gaven de benaming 'kinder-logica' aan de antwoorden 'nee' en 'ja' bij respectievelijk situatie 3 en 4. Het juiste antwoord 'dat kun je niet weten' kreeg de benaming 'wiskunde-logica'. Meer dan 50% van de leerlingen bleek kinder-logica te gebruiken met een piek in grade 6. In grade 8 begon een enkeling voorzichtig wiskunde-logica te gebruiken. Het consequent gebruik van wiskunde-logica nam toe tot 10 à 16% in grade 10 [O'Brien].

In een tweede versie van de test hebben de onderzoekers ook naar de invloed van taal gekeken. 'Als...dan...' werd daarin vervangen door logisch equivalente uitspraken. Een voorbeeld staat in figuur 3. Deze vraagstelling leverde een aanzienlijke verbetering op. In grade 10 gebruikte nu ruim 50% van de leerlingen consequent wiskunde-logica [O'Brien].



figuur 3

De onderzoekers concluderen dat leraren zich ervan bewust moeten zijn, dat slechts een gedeelte van de onderwerpen in grade 10 geschikt is voor de als...dan...-vorm. Daarnaast geven de onderzoekers aan dat docenten vaak belang hechten aan het product (eindresultaat) in plaats van het proces (leerproces). Dat vinden zij een gemiste kans, want leerlingen kunnen een goed product afleveren zonder de stof te begrijpen. In hun conclusies wordt verwezen naar het wiskundecurriculum (Verenigde Staten) uit de jaren 70 [O'Brien]. Dat curriculum is totaal niet te vergelijken met het huidige Nederlandse curriculum. Wel mag er uit dit onderzoek aangenomen worden dat ook in Nederland veel leerlingen in 4 vwo moeite zullen hebben met als...dan...-beweringen. Met een diagnostische toets heb ik dat natuurlijk nog onderzocht. Hier kunt u meer over lezen in hoofdstuk 4. Daar zullen ook nog twee andere onderzoeken, waarvan vragen in de toets zijn verwerkt, besproken worden.

In een derde versie van de test hebben de onderzoekers O'Brien, Shapiro en Reali naar de invloed van de context gekeken. Deze test is echter gedateerd en de resultaten zijn dan ook onbruikbaar. Wel is er de afgelopen jaren opnieuw gekeken naar de rol van de context waarin een probleem gegeven wordt. In het artikel *The Role of Mathematical Context in Evaluating Conditional Statements* wordt vooral gekeken naar de invloed van een wiskundige of niet-wiskundige context op een voorwaardelijke bewering. Het artikel geeft duidelijke verschillen aan wat de invloed van de context op het resultaat betreft. Eerstejaars studenten Wiskunde met zeer goede resultaten werden gesplitst in twee groepen. De ene groep werd gevraagd aan

te geven of beweringen bij een doolhof 'waar' of 'onwaar' zijn, of 'dat je dat niet kunt weten'. Vervolgens werden diezelfde beweringen isomorf verpakt in een wiskundig abstract probleem voor de tweede groep. De resultaten zijn verrassend. Het blijkt dat wiskundigen dagelijkse situaties op dezelfde manier benaderen als de rest van de bevolking, maar in een wiskundige context veel strikter redeneren. De context is dus een belangrijk aandachtspunt bij logische problemen [Inglis, "Role"].

In de jaren 60 en 70 werd er in Nederland, net als in de Verenigde Staten, in het voortgezet onderwijs vaak Logica gegeven. Logica bestond dan meestal uit niet veel meer dan waarheidstabellen bij de Propositielogica. Maar is dat wel de ideale start? Leren leerlingen daardoor beter redeneren? O'Brien, Shapiro en Reali gaven in hun conclusies al aan dat docenten aandacht moeten hebben voor het leerproces en niet alleen voor het product. Een waarheidstabel kan geheel juist worden ingevuld zonder dat een leerling begrijpt wat hij of zij aan het doen is. In hoofdstuk 3 vindt u meer over het curriculum voor het Nederlandse Wiskunde-onderwijs van vroeger, nu en de toekomst.

Ook Jon Wheatley vindt dat er niet uitsluitend gefocust moet worden op waarheidstabellen. In zijn artikel *Logic: Game or Tool* houdt hij begin jaren 60 een betoog om eerstejaars studenten in het hoger onderwijs symbolische Logica anders aan te bieden. Wheatley zegt dat de functie van waarheidstabellen als basis van het systeem wordt overgeslagen. Ook ziet hij dat er verwarring ontstaat bij het gebruik van de connectieven 'en' en 'of'. Deze connectieven hebben binnen de Propositielogica een enigszins andere betekenis dan in de gewone taal. Wheatley benadrukt dat hij zeker niet voor afschaffing van het Logica-onderwijs is. Het helpt bij bewijzen en draagt bij aan het inzicht tussen wiskundige systemen en hun toepassingen. Bovendien vormt Logica een goede inleiding in de verzamelingenleer. Harrie de Swart schreef recent in *Euclides* een artikel met een soortgelijke strekking. Daarnaast geeft De Swart aan dat het belangrijk is dat een student het verschil ziet tussen een juiste en onjuiste redenering. In het dagelijks leven worden bij onjuiste

redeneringen vaak argumenten bedacht en ontstaan er allerlei foutieve denkwijzen [Swart; Wheatley].

Tot zover de literatuur. Ik heb ook nog diverse experts persoonlijk geïnterviewd. In een telefonisch interview verwoordt Marco Swaen het voorgaande nog wat scherper. Hij geeft aan dat leerlingen al op jonge leeftijd redeneren. Wiskunde probeert die redeneerwijzen te formaliseren. Aan het redeneren zelf kan echter weinig meer veranderd worden. Voor leerlingen is het herkennen van een redeneervorm vaak het probleem, zeker als het gaat om als...dan...-beweringen los van de betekenis. Met bekende inhoud kan men meestal redelijk goed overweg.

Marco Swaen is helder over de waarheidstabellen: "Door waarheidstabellen leren leerlingen niet beter redeneren." Toch zijn die tabellen als formalisering vanuit een wiskundig oogpunt ook weer niet onbelangrijk. Ingewikkelde situaties kunnen met behulp van waarheidstabellen eenvoudig worden overzien. Ze bieden een algoritmisch kader. Barteld Kooi sluit daarbij aan: "Puzzelen is leuk, maar daarvan leer je niets systematisch. Hiervoor zul je dus echt de waarheidstabellen nodig hebben. Maar als vertrekpunt zijn ze te droog" [Kooi; Swaen, "Telefonisch"].

Hoofdstuk 3: De positie van Logica binnen de schoolvakken

Logica is geen apart schoolvak binnen het voortgezet onderwijs. Ook is Logica geen verplicht onderdeel van het examenprogramma Filosofie voor het vwo. Wat er in de bovenbouw van het vwo aan Logica wordt behandeld is dus docentafhankelijk. In dit hoofdstuk wordt er allereerst gekeken naar mogelijkheden voor Logica bij niet-Wiskunde vakken. In een tweede paragraaf staat Logica binnen het schoolvak Wiskunde centraal: vroeger, heden en toekomst.

§ 3.1: Logica bij niet-Wiskunde vakken

Filosofie

Logica is traditioneel de wetenschap van het redeneren en past dus prima binnen de Filosofie. Toch zijn Logica en Taalfilosofie geen onderdelen van het examenprogramma Filosofie voor het vwo. Het examenprogramma Filosofie bestaat uit vier domeinen die elk weer vier subdomeinen bevatten. Jaarlijks wordt een aantal van die subdomeinen aangewezen als examenstof voor het centraal schriftelijk examen. De domeinen zijn:

- A) Wijsgerige Antropologie: Wat is de mens?
- B) Ethiek: Wat is goed?
- C) Kennisleer: Onder welke voorwaarden is geldige kennis mogelijk?
- D) Wetenschapsleer: Welke zijn wetenschappelijke methoden?

Op het schoolexamen komt daarnaast aan de orde:

- E) Uit twee domeinen die niet op het centraal schriftelijk examen aan de orde komen één subdomein.
- F) Eén subdomein uit één van de volgende domeinen:
 - Sociale Filosofie
 - Metafysica
 - Cultuurfilosofie
 - Esthetica

Niet alle scholen voor vwo bieden het vak Filosofie als examenkeuzevak aan. Ook is er een aantal scholen dat leerlingen in klas 4 verplicht kennis laat maken met Filosofie. In die kennismakingsmodule is de docent wat vrijer wat onderwerpkeuze betreft. Toch zal Logica ook daar een ondergesneeuwd kindje blijven vanwege het beperkt aantal lesuren. Docenten die Logica behandelen gaan vaak niet verder dan wat syllogismen, die door de Griekse filosoof Aristoteles ($\pm$ 384-322 v. Chr.) zijn ontwikkeld [Bekkering; Gottschal].

Informatica

Het vak Informatica kent geen centraal schriftelijk examen, maar heeft wel een schoolexamen over de volgende vier domeinen:

- A) Informatica en perspectief
- B) Basisbegrippen en vaardigheden
- C) Systemen en hun structurering
- D) Toepassingen in samenhang

De onderwerpen binnen deze domeinen zijn vrij oppervlakkig. Ook worden Logica en logische schakelingen niet genoemd. De diepgang is dus vooral docentafhankelijk, evenals een eventuele module 'logische schakelingen'. Via internet zijn er wel wat modules beschikbaar. Stephan van der Horst voegt bijvoorbeeld in zijn module de vakken Wiskunde, Natuurkunde en Informatica samen. Via (wiskundige) uitspraken die slechts waar of onwaar kunnen zijn, gaat hij naar schakelingen uit de Informatica. Die schakelingen worden met en-, of-, en niet-poorten gemaakt. Later volgt de xof-poort voor het exclusieve of. Dat alles wordt omgeven met waarheidstabellen en een computertoepassing voor de schakelingen. Zijn lesbrief is beschikbaar gesteld voor andere docenten via de webpagina 'Informatica in het Voortgezet Onderwijs' voor docenten Informatica [Bergervoet; Horst].

Nederlands

In het examenprogramma voor het vak Nederlands zit wel wat Logica verweven met een stukje Argumentatieleer. Domein D – argumentatieve vaardigheden – omvat:

De kandidaat kan een betoog:

- analyseren;
- beoordelen;
- zelf opzetten en presenteren; schriftelijk en mondeling.

Bij het beoordelen van betogen komen ook als...dan...-redeneringen en drogredenen aan bod. Al is de diepgang hiervan weer docentaafhankelijk. In figuur 4 staat een voorbeeld van een oefening uit de methode Taaldaden [Braet 66].

Oefening 10 Beoordeling van vier minibetoogjes

Hieronder volgen vier minibetoogjes:

-
- (1) *Dit rijbewijs is ongeldig; het is niet van een handtekening voorzien.*
 (2) *Ik zag dat hij een trouwring draagt; ik neem daarom aan dat hij getrouwd is.*
 (3) *Met die leuke teksten en swingende muziek wordt die plaat een verkoopsucces.*
 (4) *Dat merk, afgekraakt in de Consumentengids, zal wel uit de handel genomen worden.*
-

A Deze betoogjes bestaan steeds uit één stelling (conclusie) en één argument, al vormen die twee elementen niet steeds twee aparte zinnen.

1 Wijs in alle betoogjes de stelling (conclusie) en het argument aan.

B In deze betoogjes wordt er, zoals gebruikelijk, een stap van argument naar conclusie gezet die we kunnen aangeven met een afleidingsregel van de vorm *Als iemand/iets ..., dan ...* Op de stipeltjes moet je dan achtereenvolgens het argument en de conclusie invullen. Bij voorbeeld 1 levert dat op: *Als een rijbewijs niet van een handtekening is voorzien, is het ongeldig.*

2 Formuleer ook voor de andere voorbeelden de afleidingsregels.

3 Vind je de stappen, de afleidingsregels, in de vier voorbeelden (tot op zekere hoogte) aanvaardbaar?

C In deze minibetoogjes komen geen verdere pro-argumenten en behandeling van contra-argumenten voor. De verdere pro-argumenten laten we in dit geval rusten.

4 Welke drie voorbeelden komen voor contra-argumenten in aanmerking? Verzin per voorbeeld een zinnig contra-argument en weeg dit af tegen het gegeven pro-argument.

figuur 4

§ 3.2: Logica binnen de Wiskunde

Zoals in de vorige paragraaf beschreven is, heeft Logica binnen de niet-Wiskunde vakken nauwelijks een plaats. Bij het schoolvak Wiskunde is dat in de bovenbouw van het vwo niet anders. Enkele tientallen jaren geleden stonden er wel hoofdstukken Logica in de methodes voor het vak Wiskunde. Meer hierover in paragraaf 3.2.1. In paragraaf 3.2.2 ga ik in op het huidige curriculum en in paragraaf 3.2.3 kijk ik naar de toekomst van het Wiskunde-onderwijs.

§ 3.2.1: Vroeger

Enkele decennia geleden stonden er hoofdstukken Logica en verzamelingen in de methodes voor het vak Wiskunde voor de bovenbouw van het vwo. Grote delen van deze hoofdstukken waren geen verplichte examenstof. In de inleiding van deel 5 van de methode *Van a tot z* uit 1972 staat: “In de hoofdstukken over logica en groepen wordt meer behandeld dan in het leerplan wordt aangeduid. Indien die onderwerpen als keuzeonderwerp gekozen worden, geven deze hoofdstukken echter te weinig. De behandeling van deze onderwerpen is dus niet verplicht. Wij hopen echter dat het leerplan zich in deze richting zal ontwikkelen en willen hiermee onze bijdrage leveren” [Hiele v]. Deel 6v van *Moderne Wiskunde* uit 1978 verwoordt dit alles wat informeler: “Los van de andere hoofdstukken staat hoofdstuk *6 (Logica en verzamelingen). Het is van een * voorzien en kan dus zonodig worden overgeslagen. Maar dat zou wel jammer zijn, omdat het de achtergronden laat zien van het gebruik van de symbolen $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$. Ze worden in de wiskunde gebruikt, maar zijn eigenlijk symbolen uit het studiegebied dat *logica* heet. Gemakkelijk is hoofdstuk 6 niet, maar waarom zou je het niet eens bestuderen? Je krijgt er een andere kijk door op ‘logisch denken’” [Krooshof 5].

Beide methodes gaan al snel naar de waarheidstabellen toe. *Moderne Wiskunde* begint wel met een concreet voorbeeld: “Als ik vanavond om elf uur nog wakker lig, dan verpruts ik morgen het wiskundeproefwerk” [Krooshof 112]. Op de tweede bladzijde van dit hoofdstuk wordt deze bewering direct herschreven met propositieletters en

de implicatiepijl tot een korte, maar abstracte, samengestelde bewering. De waarheidstabel wordt hierbij als een afspraak gegeven. Wel volgt er een korte toelichting aan de hand van het eerder genoemde voorbeeld. De opgaven bij deze theorie gaan over implicaties in de getaltheorie en vlakke meetkunde. Ook worden Venndiagrammen als bekend verondersteld. De opgaven zijn abstract verwoord en geheel wiskundig; er is niets meer over van het concrete voorbeeld aan het begin van dit hoofdstuk. Vervolgens worden de kwantoren ($\forall$ en $\exists$) geïntroduceerd, waarna in een aantal opgaven de waarheid van wiskundige beweringen beoordeeld moet worden [Krooshof 112-17].

In de tweede paragraaf staat de dubbele implicatie centraal. Ook het symbool voor ‘en’ ($\wedge$) wordt geïntroduceerd, waardoor de waarheidstabel gegeven kan worden. Wederom volgen wiskundige oefeningen. De paragraaf wordt afgesloten door het verband aan te geven met het oplossen van vergelijkingen waarbij het symbool $\Leftrightarrow$ al veelvuldig gebruikt is. In figuur 5 staat een bladzijde uit deze paragraaf [Krooshof 118-22].

- 2 Teken een venndiagram als in figuur 6.1.
a. Kleur die gebieden waar de elementen x van V liggen waarvoor geldt:

$$x \in P \Leftrightarrow x \in Q$$

- b. Als nu gegeven is, dat

$$\forall x \in V: x \in P \Leftrightarrow x \in Q$$

een ware bewering is, welke conclusie kun je dan trekken ten aanzien van de verzamelingen P en Q ?

- 3 Leg uit dat

$$\forall x \in \mathbb{N}: x > 5 \Leftrightarrow x^2 > 30$$

een ware bewering is en ook dat dit niet het geval is met

$$\forall x \in \mathbb{R}^+: x > 5 \Leftrightarrow x^2 > 30$$

Voor welke $x \in \mathbb{R}^+$ zijn $x > 5$ en $x^2 > 30$ ongelijkwaardig?

- 4 In de volgende bewering staan drie open plaatsen:

$$\forall x \in \mathbb{R}: (x-3)(x-5) \dots 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-3 \dots 0 \wedge x-5 \dots 0)$$

Op elk van de drie plaatsen mag je naar verkiezing $>$ of $<$ schrijven. Kun je dat zo doen dat er een ware bewering komt te staan?

- 5 Vervang in opdracht 4 het teken $\wedge$ door $\vee$ en beantwoord dan de vraag opnieuw.

Je bent gewend het teken $\Leftrightarrow$ te gebruiken bij het opschrijven van de oplossing van een ongelijkheid of een vergelijking. Als je schrijft:

$$(x-3)(x+7) = 39 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 39$$

dan bedoel je daarmee dat de bewering:

de vergelijking $(x-3)(x+7) = 39$ heeft dezelfde oplossingsverzameling als de vergelijking $x^2 + 4x - 21 = 39$ een ware bewering is.

Als je dan zegt dat de twee vergelijkingen gelijkwaardig zijn dan gebruik je het woord „gelijkwaardig” in een wat andere betekenis

Logica en verzamelingen

dan in deze paragraaf. Daar is geen bezwaar tegen, als je maar precies weet wat je met het gebruik van het teken $\Leftrightarrow$ in beide gevallen bedoelt. Voor de volledigheid zetten we die twee betekenissen van $\Leftrightarrow$ nog eens naast elkaar:

Twee vergelijkingen zijn gelijkwaardig

Met deze uitspraak bedoelen we dat de beide vergelijkingen dezelfde oplossingsverzameling hebben.

Gebruiken we het symbool $\Leftrightarrow$ in deze betekenis, dan kunnen we zeggen:

$$(x-3)(x+7) = 39 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 39$$

is een ware bewering, omdat beide vergelijkingen $\{-10, 6\}$ als oplossingsverzameling hebben. Dat wil zeggen dat elk van de open beweringen in een ware bewering overgaat als voor x wordt gesubstitueerd -10 of 6 . Voor elke andere waarde van x gaat elk van de open beweringen over in een onware bewering.

Twee beweringen zijn gelijkwaardig

Met deze uitspraak bedoelen we dat de beide beweringen gelijke waarheidswaarde hebben, dus beide waar zijn óf beide onwaar.

Kunnen we bij deze betekenis van het symbool $\Leftrightarrow$ zeggen, dat

$$(x-3)(x+7) = 39 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 39$$

een ware bewering is?

Nee, want het hangt van de keuze van de waarde van x af of de open beweringen in deze uitspraak waar of onwaar worden. Zo gezien is deze uitspraak in zijn geheel een open bewering.

Maar we hebben hierboven gezien dat voor $x = -10$ of $x = 6$ beide deelbeweringen waar worden en voor elke andere waarde van x onwaar. Voor elke waarde van x hebben de beide deelbeweringen gelijke waarheidswaarde, daarom is de volgende bewering waar:

$$\forall x \in \mathbb{R}: (x-3)(x+7) = 39 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 39$$

In het vervolg zul je bij het oplossen van vergelijkingen nog wel dikwijls zeggen en schrijven: deze vergelijkingen zijn gelijkwaardig.

Het hoofdstuk over Logica in *Van a tot z* ziet er een stuk formeler uit en heet dan ook “formeel logica”. In *Van a tot z* worden de kwantoren al als bekend verondersteld en moeten wiskundige uitspraken direct op waarheid beoordeeld worden. De inleiding van dit hoofdstuk geeft een mooie weergave van de inhoud, zolang het formele karakter van de tekst en opgaven in het achterhoofd wordt gehouden: “In dit hoofdstuk zullen we verschillende uitspraken behandelen. We maken gebruik van waarheidstabellen. Verschillende belangrijke stellingen uit de meetkunde formuleren we in de taal van de logica. We houden ons bezig met het omkeren van stellingen en de wet van de contrapositie. Ook bestuderen we het verband tussen logica en verzamelingen” [Hiele 37]. Korte stukjes theorie worden afgewisseld met opgaven waarbij over het algemeen het niveau een stuk hoger ligt dan in *Moderne Wiskunde*. In de extra stof bij dit hoofdstuk wordt de ‘Algebra van Boole’ behandeld. Leuk detail: Achter in het boek staan alle axioma’s, definities en stellingen nog eens netjes op een rijtje. In figuur 6 staat een bladzijde uit dit hoofdstuk [Hiele 37-47, 132-37, 170-73].

§ 3.2.2: Huidige programma’s

Het grootste gedeelte van het huidige curriculum voor zowel Wiskunde A als Wiskunde B is stof voor het centraal schriftelijk examen. Een klein gedeelte is alleen schoolexamen. Het examenprogramma is vastgelegd aan de hand van tientallen eindtermen. Deze eindtermen voor het vwo beslaan de domeinen:

Bg: Functies en grafieken

Cg: Discrete analyse

D(g): Meetkunde

Eg: Combinatoriek en kansrekening

Ba: Differentiaalrekening met toepassingen

Bb: Differentiaal- en integraalrekening

Ca: Discrete dynamische modellen

Cb: Continue dynamische modellen

Da: Lineair programmeren

S III, 3

g. Controleer deze laatste tabel.

Het symbool $\Leftrightarrow$ tussen twee uitspraken wil zeggen, dat de uitspraken equivalent zijn. De uitspraak $p \Leftrightarrow q$ is onjuist, als één van de twee uitspraken juist is en de andere niet.

h. Maak de volgende tabel af:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

i. We kunnen het resultaat van alles wat we nu gehad hebben in de volgende tabel samenvatten; vul deze tabel in.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \Rightarrow q$
0	0									
0	1									
1	0									
1	1									

Eigenschappen van conjunctie en disjunctie

- 4 Het teken $\wedge$ noemt men wel het *conjunctie*-teken en het teken $\vee$ het *disjunctie*-teken. Voor de conjunctie en de disjunctie bestaan verschillende eigenschappen.

a. Geldt de commutatieve eigenschap voor conjunctie en disjunctie?

b. Laat zien met behulp van een waarheidstabel voor 3 uitspraken (9 rijen), dat $(p \wedge q) \vee r$ overeenkomt met (equivalent is met) $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$. Dit is dus een distributieve eigenschap.

c. Bewijs op dezelfde manier, dat $(p \vee q) \wedge r$ overeenkomt met $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

d. Beredeneer met behulp van waarheidstabellen, dat $\neg(p \vee q)$ overeenkomt met $\neg p \wedge \neg q$.

42

S III, 4

e. Eveneens, dat $\neg(p \wedge q)$ overeenkomt met $\neg p \vee \neg q$.

f. Beredeneer, dat $p \Rightarrow q$ equivalent is met $\neg p \vee q$.

g. Beredeneer, dat indien p onwaar is, $p \Rightarrow q$ waar is voor alle uitspraken q .

Logica en verzamelingen

- 5 We beschouwen uitspraken die betrekking hebben op reële getallen. Laat zo'n uitspraak p zijn. Voor sommige reële getallen is p waar, voor andere onwaar. De verzameling van alle reële getallen waarvoor p waar is noemen we A .

a. Controleer, dat $\forall x \in A: p$ is waar.

b. Controleer, dat $\forall x \in \mathbb{R} \setminus A: p$ is onwaar.

c. Wat is de verzameling der getallen $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $\neg p$ waar is?

d. Als A de verzameling is van alle getallen, waarvoor de uitspraak p waar is en B is de verzameling van alle getallen, waarvoor de uitspraak q waar is, welke verzameling correspondeert dan met de uitspraak $p \wedge q$ is waar?

En welke met de uitspraak $p \vee q$ is waar?

e. A is de verzameling van alle getallen waarvoor p waar is en B is de verzameling van alle getallen waarvoor q waar is. Welke verzameling correspondeert nu met de uitspraak $p \Rightarrow q$ is waar?

f. Wat weet je van de verzamelingen A en B van opgave e., als voor alle reële getallen geldt: $p \Rightarrow q$?

g. Wat weet je van de verzamelingen A en B van opgave e., als voor alle reële getallen geldt: $p \Leftrightarrow q$?

h. De volgende uitspraak is een ware bewering:

$$\forall x \in \mathbb{R}: 2 < x < 5 \Rightarrow 0 < x < 10.$$

Verklaar deze uitspraak met behulp van verzamelingen.

43

figuur 6

Db: Goniometrische functies

Ea: Grafen en matrices

Eb: Normale verdelingen en toetsen van hypothesen

Fa: Statistiek en kansrekening

Fb: Keuze-onderwerpen

Ga: Keuze-onderwerpen

Gb: Voortgezette meetkunde

Hb: Voortgezette analyse

Waarbij 'g' staat voor een gezamenlijk domein voor zowel Wiskunde A als B, 'a' voor een domein voor Wiskunde A en 'b' voor een domein voor Wiskunde B.

Interessant zijn de domeinen 'Fb' voor Wiskunde B1 (profiel 'Natuur & Gezondheid') en B12 (profiel 'Natuur & Techniek') en 'Ga' voor Wiskunde A12 (profiel 'Economie

& Maatschappij'). Het domein Fb is gelijk aan het domein Ga. Het vak Wiskunde A1 (profiel 'Cultuur & Maatschappij') kent dit domein niet. Het domein kent alleen een schoolexamen en is als volgt omschreven: "Dit domein omvat een of meer keuze-onderwerpen. De onderwerpen worden gekozen door de school. De onderwerpen kunnen, indien de school daarvoor kiest, voor elke kandidaat verschillend zijn. De totale studielast van de keuze-onderwerpen is 40 uur" [Examenprogramma's]. Binnen dit domein kan de docent er voor kiezen – voor een gedeelte van de uren – Logica te behandelen. Voor de Wiskunde A-leerlingen is er helaas nauwelijks tot geen bestaand materiaal. Voor de Wiskunde B-leerling kan gebruik gemaakt worden van het boekje *Denkende machines. Computers, rekenen, redeneren* [Eijck]. Meer mogelijkheden voor Wiskunde B-leerlingen staan in paragraaf 5.5.

§ 3.2.3: Toekomst

Vanaf 2007 verandert de inrichting van de Tweede Fase in de bovenbouw van het Hoger Algemeen Voortgezet Onderwijs (havo) en het vwo. In figuur 7 staat het schema voor de nieuwe Tweede Fase voor het vwo met de bijbehorende studielast [2e fase]. Hierdoor verandert ook het curriculum van het vak Wiskunde. De deelvakken A1, A12, B1 en B12 zullen verdwijnen. Daarvoor in de plaats komen de vakken Wiskunde A, B, C en D. Wiskunde A is bedoeld voor de profielen 'Economie & Maatschappij' en 'Natuur & Gezondheid' en Wiskunde B voor het profiel 'Natuur & Techniek'. Het nieuwe vak Wiskunde C zal op het vwo gegeven worden aan de leerlingen met het profiel 'Cultuur & Maatschappij'. Op het havo hebben de leerlingen met het profiel 'Cultuur & Maatschappij' geen Wiskunde meer. Het nieuwe vak Wiskunde D wordt profielkeuzevak voor leerlingen met het profiel 'Natuur & Techniek'. Een school is niet verplicht om Wiskunde D aan te bieden. Binnen de vrije ruimte kunnen de leerlingen voor zover de school dat toelaat natuurlijk altijd nog andere keuzes maken.

Ten tijde van het schrijven van deze scriptie zijn de examenprogramma's nog niet officieel vastgesteld. Uitgangspunt voor de nieuwe examenprogramma's is dat scholen tot 2010 de huidige boeken kunnen blijven gebruiken. Vanaf 2010 zijn er

nieuwe wijzigingen in het examenprogramma mogelijk. De examenprogramma's voor Wiskunde A en B zullen voorlopig dus niet veel verschillen van de huidige programma's voor Wiskunde A12 en B12. Vanwege de terugloop in studielast zullen eerder onderwerpen geschrapt dan toegevoegd worden. Wiskunde C zal voorlopig grotendeels overlap vertonen met het huidige Wiskunde A1-programma. Nieuw in het voorstel is wel dat aan Wiskunde C het domein 'G: Keuzeonderwerpen' wordt toegevoegd. Voor Wiskunde D zal er volgend jaar wel een voorlopig programma liggen. In het huidige voorstel is er veel ruimte voor keuzeonderwerpen die de school en/of docent kan invullen. Via veldraadplegingen worden er door de 'commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO)' ideeën voor de invulling verzameld en teruggekoppeld naar scholen en docenten Wiskunde. Verder zal cTWO voor het leerplan vanaf 2010 concrete examenprogramma's voorstellen voor Wiskunde A, B, C en D.³

2e fase VWO

NT, NG, EM: 3 verplichte profielvakken; 1 profielkeuzevak; 1 keuze examenvak

CM : 2 verplichte profielvakken; 1 profielkeuzevak cultuur + 1 profielkeuzevak maatschappij; 1 keuze examenvak

		NT		NG		EM		CM		
gemeenschappelijk deel		Nederlands	480	Nederlands	480	Nederlands	480	Nederlands	480	
		Engels	400	Engels	400	Engels	400	Engels	400	
		2e Mod. vr. taal (1)	480	2e Mod. vr. taal (1)	480	2e Mod. vr. taal (1)	480	2e Mod. vr. taal (1)	480	
		Maatschappijleer	120	Maatschappijleer	120	Maatschappijleer	120	Maatschappijleer	120	
		Lich. opvoeding	160	Lich. opvoeding	160	Lich. opvoeding	160	Lich. opvoeding	160	
		CKV of KCV	160	CKV of KCV	160	CKV of KCV	160	CKV of KCV	160	
		ANW	120	ANW	120	ANW	120	ANW	120	
profielvakken		Wiskunde B	600	Wiskunde A (of B)	520	Wiskunde A (of B)	520	Wiskunde C (of A/B)	480	
		Natuurkunde	480	Biologie	480	Economie	480	Geschiedenis	480	
		Scheikunde	440	Scheikunde	440	Geschiedenis	440			
verdieping of verbreding profielkeuzevak kiezen: NT+EM 1 uit 4, NG 1 uit 3, CM 1 cultuurvak + 1 maatsch. vak								Aardrijkskunde	440	maatsch.
								Maatschappijwet.	440	maatsch.
		Informatica	440	Natuurkunde	480	Mod. vreemde taal	480	Economie	480	maatsch.
		Biologie	480	NL&T	440	Aardrijkskunde	440	Mod.vr./klass.taal	480/600	cultuur
		NL&T	440	Aardrijkskunde	440	M&O	440	Kunstvak	480	cultuur
		Wiskunde D	440			Maatschappijwet.	440	Filosofie	480	cultuur
keuze examenvak		Naar keuze	440	Naar keuze	440	Naar keuze	440	Naar keuze	440	
		profielwerkstuk	80	profielwerkstuk	80	profielwerkstuk	80	profielwerkstuk	80	
		vrij deel	400	vrij deel	480	vrij deel	480	vrij deel	480	
		Totaal	4800	Totaal	4800	Totaal	4800	Totaal	4800	

(1) kan vervangen worden; gymnasium klassieke taal (600)

17 februari 2006, Tweede Fase Adviespunt

figuur 7

³ De voorstellen en discussies over de nieuwe wiskunde-programma's zijn onder andere terug te vinden op de websites van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (<http://www.nvww.nl>) en de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (<http://www.ctwo.nl>).

Logica blijft dus (voorlopig) keuzeonderwerp en zal dus alleen op het programma verschijnen wanneer de docent hier expliciet voor kiest. Positief is de ontwikkeling dat naar verwachting ook voor de leerlingen in het profiel 'Cultuur & Maatschappij' ruimte in het Wiskunde-programma zal worden vrijgemaakt voor keuzeonderwerpen (domein G).

§ 3.3: Vakkenintegratie

De nieuwe Tweede Fase biedt wellicht ook mogelijkheden tot vakkenintegratie. Hierdoor kunnen docenten van verschillende vakgebieden gezamenlijk een module 'Logica' opzetten. In paragraaf 3.1 kwamen de vakken Filosofie, Informatica en Nederlands al ter sprake. Net als bij Wiskunde zijn bij die vakken kritisch nadenken en een goede redenering belangrijk. In plaats van overlap tussen de verschillende vakken te creëren, kunnen docenten via een module Logica leerlingen verbanden tussen vakgebieden laten inzien. Het ontwikkelen van deze vaardigheid lijkt mij voor de verdere loopbaan van elke individuele leerling essentieel. Met uitdagende groepsopdrachten kunnen ook samenwerkingsvaardigheden verder ontwikkeld en getraind worden.

Hoofdstuk 4:

Eerste onderzoekscomponent: Pretest (Diagnostische toets)

§ 4.1: Inleiding

Om de hoofdvraag *‘In hoeverre is het mogelijk om in 4 vwo Logica-les te geven?’* uit hoofdstuk 1 goed te kunnen beantwoorden, heeft mijn onderzoek uit vier onderzoekscomponenten bestaan, die u in paragraaf 1.3.1 kunt terugvinden. In dit hoofdstuk beschrijf ik de eerste onderzoekscomponent (pretest); een diagnostische toets. Deze toets is gebruikt om het niveau van de leerlingen te bepalen en is zowel afgenomen aan leerlingen met Wiskunde A als aan leerlingen met Wiskunde B. De toetsvragen en de bijbehorende uitwerkingen staan in bijlage A. In paragraaf 4.2 zal ik de selectie van de toetsvragen toelichten en in paragraaf 4.3 vindt u de resultaten van de pretest.

§ 4.2: Selectie toetsvragen

Het doel van de diagnostische toets was om te meten in hoeverre leerlingen in 4 vwo logisch kunnen redeneren. Daarbij is vooral gekeken naar als...dan...-redeneringen. Ook moest de toets uitwijzen of er verschillen tussen Wiskunde A- en Wiskunde B-leerlingen optreden. Om leerlingen te dwingen de toetsvragen in een bepaalde volgorde te maken, heb ik gekozen voor een computergestuurde toets via Brainbox (Blackboard-omgeving). De duur van de toets is ongeveer 30 minuten.

De toets bestaat uit elf vragen. De eerste vraag is alleen bedoeld voor de verwerking van de resultaten: Wiskunde A of Wiskunde B. Door deze vraag dwing je leerlingen in ieder geval de introductietekst te lezen voordat ze aan de opgaven beginnen.

Vraag zes tot en met elf zijn de belangrijkste opgaven. Om leerlingen eerst aan de toets en het redeneren te laten wennen, worden deze opgaven vooraf gegaan door een aantal logische puzzels. Vraag twee en drie komen uit een internettest. De

leerlingen krijgen drie plaatjes te zien en moeten bepalen welk plaatje logisch op de vierde plek hoort [Simola]. Vraag vier en vijf komen uit de Wiskunde Kangoeroewedstrijd van 2002. In vraag vier moeten leerlingen een doos bijplaatsen door te beredeneren welke objecten zwaarder zijn. Deze opgave zat destijds in de wedstrijdopgaven voor klas één tot en met vijf. In vraag vijf moeten leerlingen bepalen wie een cadeau verstoppt heeft. Ze kunnen daarbij het beste systematisch te werk gaan: als Alfred het gedaan heeft, dan... enzovoorts. Deze opgave zat destijds in de wedstrijdopgaven voor klas één en twee [Wiskunde].

Vraag zes staat bekend als de zogenaamde Wason-test. Wason was namelijk de eerste die hierover publiceerde en wel in 1968 [Wason]. De deelnemers aan de test kregen vier kaarten te zien. Elke kaart had een letter op de ene kant en een getal op de andere kant. In figuur 8 ziet u vier kaarten.



figuur 8

Bij die kaartjes hoort de volgende regel: “Elke kaart met een D op de ene kant, heeft een 3 op de andere kant.” De deelnemer kreeg vervolgens de vraag: “Welke van de kaartjes moet je zeker omdraaien om deze regel te controleren?”

De regel kan vertaald worden naar een regel met als-dan: “Als een kaart een D op de ene kant heeft, dan heeft hij een 3 op de andere kant.” De regel gaat dus maar één kant uit. Het logisch juiste antwoord is dan ‘D en 7’. Bij verschillende onderzoeken kwam slechts gemiddeld 10% van de deelnemers tot dit antwoord. Intuïtief zullen veel mensen de kaart met de 3 omdraaien. Wason kwam op een percentage van 65% [Inglis, “Mathematicians”].

Een paar jaar geleden hebben Engelse onderzoekers de test opnieuw uitgevoerd. Om voldoende reacties te krijgen hebben zij de test via internet afgenomen. Mogelijke foutieve data hebben de onderzoekers er via allerlei methoden uitgefilterd. Zij

hebben daarbij bachelorstudenten Wiskunde (260), stafleden Wiskunde (21) en bachelorstudenten Geschiedenis (123) ondervraagd. De studenten Geschiedenis representeerden daarbij de doorsnee bevolking. In tabel 1 staan de percentages van de gegeven antwoorden uitgesplitst naar deze drie groepen. Bij de studenten Geschiedenis gaf slechts 8% het antwoord 'D en 7'. Dat komt aardig overeen met de eerder genoemde 10%. Bij de wiskundigen lag dat percentage beduidend hoger, maar nog steeds ruim beneden de 50%. Interessant is te kijken naar hoeveel procent van de deelnemers uit elke onderzoeksgroep een bepaalde kaart selecteert. De resultaten hiervan staan in tabel 2. Bij de studenten Geschiedenis komt het percentage dat de 3 omdraait aardig overeen met dat van Wason, namelijk 62%. Bij de wiskundigen blijft dat percentage steken op 20% [Inglis, "Mathematicians"]. In paragraaf 4.3.2 zal ik deze resultaten vergelijken met de antwoorden van de leerlingen uit 4 vwo.

	Studenten Wiskunde	Stafleden* Wiskunde	Studenten Geschiedenis
D	35%	24%	22%
D en K	0%	0%	0%
D en 3	6%	5%	33%
D en 7	29%	43%	8%
D, K en 3	0%	5%	2%
D, K en 7	13%	14%	1%
D, 3 en 7	3%	10%	7%
K, 3 en 7	5%	0%	9%
D, K, 3 en 7	8%	0%	19%

* Stafleden zijn UD's, UHD's en hoogleraren

tabel 1

	Studenten Wiskunde	Stafleden Wiskunde	Studenten Geschiedenis	Denkwijze
D	95%	100%	91%	modus ponens
K	25%	19%	26%	ontkenning van antecedent
3	20%	19%	62%	omgekeerde
7	57%	67%	40%	modus tollens

tabel 2

De opgave is vrij abstract. Wiskundigen zijn gewend aan abstracte redeneringen en zullen ook op hun hoede zijn voor mogelijke fouten. Wordt dezelfde opgave isomorf vertaald naar een alledaags probleem dan geeft wel bijna iedereen het juiste antwoord. In het artikel *The Role of Mathematical Context in Evaluating Conditional Statements*, dat in hoofdstuk 2 wordt beschreven, komt het verschil in benadering bij een wiskundige of niet-wiskundige context ook naar voren [Inglis, “Role”]. Een mogelijke vertaling van de Wason-test kan zijn:

een kaart heeft een D	$\leftrightarrow$	iemand drinkt alcohol
een kaart heeft geen D	$\leftrightarrow$	iemand drinkt geen alcohol
een kaart heeft een 3	$\leftrightarrow$	iemand is ouder dan 16
een kaart heeft geen 3	$\leftrightarrow$	iemand is jonger dan 16

Op elk kaartje staat nu op de ene kant een drankje met of zonder alcohol en op de andere kant een leeftijd. Het drankje en de leeftijd horen bij dezelfde persoon. De deelnemer krijgt wederom vier kaartjes te zien. In figuur 9 ziet u een voorbeeld.



figuur 9

De regel wordt: “Iemand die alcohol drinkt, moet minimaal 16 jaar zijn.” De vraag blijft: “Welke van de kaartjes moet je zeker omdraaien om deze regel te controleren?” [Devlin 144-48].

Vraag zeven tot en met elf gaan over hetzelfde probleem. In de opgave staan twee als...dan...beweringen centraal. De leerlingen wordt in vraag zeven allereerst gevraagd of de twee beweringen hetzelfde zeggen. Die vraag wordt hoogstwaarschijnlijk intuïtief beantwoord. Na een drietal deelvragen wordt dit nogmaals gevraagd in vraag elf. Door gebruik te maken van de ‘vragen één voor één’-instelling van Brainbox kunnen leerlingen niet meer terugklikken naar vraag zeven. Hun antwoord staat dus vast, waardoor een eventuele verandering in hun keuze door vraag acht, negen en tien betrouwbaar te meten is.

Het belangrijkste doel van deze opgave is te kijken of leerlingen overweg kunnen met als...dan...-beweringen. Ze moeten daarbij een tegenvoorbeeld formuleren en een informeel bewijs geven. Dezelfde vragen zijn in Engeland in 2000 op papier afgenomen aan ruim 2600 dertien-jarigen (leerjaar 8) en een jaar later nogmaals aan dezelfde onderzoeksgroep om eventuele vooruitgang te meten.⁴ Hun versie van de toetsopgaven staat in figuur 10 [Hoyles]. De resultaten worden hier niet vermeld, omdat het niet relevant is leerlingen uit 4 vwo met leerjaar 8 te vergelijken.

L1 Joe and Fred are thinking about the pair of numbers 3 and 11.

They notice that the SUM ($3 + 11$) is EVEN.

They notice that the PRODUCT (3×11) is ODD.

Joe says: If the SUM of two whole numbers is EVEN, their PRODUCT is ODD.

Fred says: If the PRODUCT of two whole numbers is ODD, their SUM is EVEN.

a) Are Joe's and Fred's statements saying the same thing?

b) The PRODUCT of two whole numbers is 1271.

Suppose Fred is right.

Which one of these must also be right? Tick (✓) one box.

- ☐ You can be sure that the SUM of the two numbers is EVEN.
☐ You can be sure that the SUM of the two numbers is ODD.
☐ You can't be sure whether the SUM is ODD or EVEN until you know what the two numbers are.

c) Is Joe's statement true?

Explain your answer.

d) Is Fred's statement true?

Explain your answer.

figuur 10

⁴ Het Engelse leerjaar 8 is te vergelijken met klas 2 in Nederland.

§ 4.3: Pretest

§ 4.3.1: Ontwerpcycli voor het verbeteren van de diagnostische toets

Omdat een diagnostische toets absoluut geen fouten of onduidelijkheden mag bevatten, heb ik de toets uitgebreid getest via een cyclus van iteratieve verbeteringen. Het schema van de diverse teststadia staat in paragraaf 1.3.2. De verschillende ronden hebben zinvolle verbeteringen opgeleverd zowel wat de verduidelijking van de vraagstelling betreft als wat de lay-out betreft.

§ 4.3.2: Toetsresultaten 4 vwo

De diagnostische toets is afgenomen aan drie klassen van het Rölingcollege, locatie Belcampo: A4M (Wiskunde A), A4NG (Wiskunde B) en A4NT (Wiskunde B). De resultaten van A4M zijn het belangrijkste, omdat de leerlingen uit die klas de toets na de lessenserie nogmaals zullen maken. In tabel 3 staan allereerst percentages van het aantal goede antwoorden per vraag uitgesplitst naar leerlingen met Wiskunde A of Wiskunde B.⁵ Gemiddeld maken de leerlingen met Wiskunde B de opgaven wat beter. Bij veel opgaven is er een verschil van ongeveer 10% tussen de twee groepen, maar bij drie opgaven (vraag 5, 7 en 11) zijn de Wiskunde A-leerlingen beter. Dit zou nader onderzoek vereisen en valt buiten dit onderzoek.

Niemand heeft bij vraag zes het logisch juiste antwoord 'D en 7' gegeven. In tabel 4 en 5 zullen de gegeven antwoorden op deze vraag wat verder uitgesplitst worden op dezelfde manier als bij het Engelse onderzoek uit paragraaf 4.2. De resultaten van dat onderzoek staan ter vergelijking ook in tabel 4 en 5. In tabel 4 staan de percentages van de gegeven antwoorden. Tabel 5 geeft aan hoeveel procent van de deelnemers uit elke onderzoeksgroep een bepaalde kaart selecteert. Opvallend veel leerlingen uit 4 vwo lezen de regel twee kanten op. Zij draaien ook de kaart met een 3 om. Slechts 20% ziet dat de 7 wel omgedraaid moet worden (modus tollens), terwijl dat

⁵ Bij vraag 9 en 10 zijn bij gedeeltelijk goede tegenvoorbeelden en bewijzen deelpunten toegekend. Deze deelpunten zijn meegenomen in de percentages. Deze deelpunten worden bij tabel 6 toegelicht.

percentage bij de studenten Geschiedenis, die een afspiegeling van de bevolking representeren, 40% is. Het antwoordpatroon van de Wiskunde B-leerlingen uit tabel 4 lijkt het patroon van de studenten Geschiedenis wat beter te benaderen dan het patroon van de Wiskunde A-leerlingen.

Vraag	A4M Wiskunde A: 18 leerlingen	A4NG/A4NT Wiskunde B: 33 leerlingen
2 (volgende plaatje)	94%	100%
3 (volgende plaatje)	61%	67%
4 (gewicht dozen)	78%	91%
5 (cadeau)	72%	61%
6 (kaartjes)	0%	0%
7 (beweringen)	39%	33%
8 (getallenpaar)	67%	85%
9 (tegenvoorbeeld)	74%	82%
10 (bewijs)	21%	37%
11 (herhaling vraag 7)	72%	67%
gemiddeld	58%	62%

tabel 3

	A4M Wiskunde A: 18 leerlingen	A4NG/A4NT Wiskunde B: 33 leerlingen	Studenten Wiskunde	Stafliden Wiskunde	Studenten Geschiedenis
D	11%	24%	35%	24%	22%
D en K	0%	0%	0%	0%	0%
D en 3	67%	55%	6%	5%	33%
D en 7	0%	0%	29%	43%	8%
D, K en 3	0%	3%	0%	5%	2%
D, K en 7	11%	3%	13%	14%	1%
D, 3 en 7	0%	3%	3%	10%	7%
K, 3 en 7	6%	6%	5%	0%	9%
D, K, 3 en 7	6%	6%	8%	0%	19%

tabel 4

	A4M Wiskunde A: 18 leerlingen	A4NG/A4NT Wiskunde B: 33 leerlingen	Studenten Wiskunde	Stafliden Wiskunde	Studenten Geschiedenis	Denkwijze
D	94%	94%	95%	100%	91%	modus ponens
K	22%	18%	25%	19%	26%	ontkenning van antecedent
3	78%	73%	20%	19%	62%	omgekeerde
7	22%	18%	57%	67%	40%	modus tollens

tabel 5

Ook vraag zeven tot en met elf vragen om een verdere toelichting. Deze toelichting staat in tabel 6 bij de percentages van het aantal goede antwoorden per vraag uit tabel 3. Hierbij is de opgavenummering uit figuur 10 (pagina 35) overgenomen. Tussen haakjes staat de opgavenummering van de diagnostische toets.

	A4M Wiskunde A: 18 leerlingen	A4NG/A4NT Wiskunde B: 33 leerlingen	Toelichting
L1a (vraag 7)	39%	33%	Een ruime meerderheid van de leerlingen denkt in eerste instantie dat de twee beweringen hetzelfde zeggen.
L1b (vraag 8)	67%	85%	De Wiskunde B-leerlingen zijn duidelijk beter in staat een algemene uitspraak te doen bij een concreet gegeven oneven product. Ruim een kwart van de A-leerlingen geeft aan dat je eerst de twee getallen moet weten voordat je iets over de som kunt zeggen.
L1c (vraag 9)	74%*	82%*	Een ruime meerderheid van de Wiskunde A- en Wiskunde B-leerlingen is in staat een juist tegenvoorbeeld te vinden. Een enkeling denkt echter dat de bewering juist is zonder hiervoor een goede verklaring te geven.
L1d (vraag 10)	21%*	37%*	15% van de Wiskunde B-leerlingen geeft een juiste algemene redenering, bij de Wiskunde A-leerlingen is dat slechts 6%.
L1a-2 (vraag 11)	72%	67%	33% van de Wiskunde A-leerlingen en 34% van de Wiskunde B-leerlingen heeft zijn of haar antwoord op vraag L1a verbeterd na de deelvragen b , c en d .

* Bij vraag L1c en L1d zijn bij gedeeltelijk goede tegenvoorbeelden en bewijzen *tabel 6* deelpunten toegekend. Deze deelpunten zijn als volgt meegenomen in de percentages: bij L1c weegt een juiste conclusie, maar incomplete verklaring voor de helft. Bij L1d weegt een juiste conclusie met meerdere juiste voorbeelden voor de helft; een juiste conclusie met maar één juist voorbeeld weegt voor $\frac{1}{5}$ deel.

Conclusie:

De 4 vwo-leerlingen hebben de toets niet slecht gemaakt. Wel blijkt dat als...dan...-beweringen inderdaad moeilijk zijn. Veel leerlingen denken dat een als...dan...-bewering twee kanten uit gelezen kan worden. Ook wordt modus tollens niet toegepast. Het geven van een algemene redenering (bewijs) voor een juiste bewering blijkt ook zeer moeilijk. Bij een onjuiste bewering zijn de meeste leerlingen echter wel in staat een tegenvoorbeeld te geven.

Hoofdstuk 5:

Tweede onderzoekscomponent: Pilot (Lespakket)

§ 5.1: Inleiding

In dit hoofdstuk beschrijf ik de tweede onderzoekscomponent (pilot): een lessenserie Logica aan 4 vwo leerlingen met Wiskunde A. In paragraaf 5.2 wordt de ontwikkeling van het materiaal beschreven, in paragraaf 5.3 de ontwerpcyclus, in paragraaf 5.4 het lesverloop en in paragraaf 5.5 mogelijkheden voor leerlingen met Wiskunde B. In bijlage C staat het lespakket: lesmateriaal, huiswerkopdrachten en een docentenhandleiding.

§ 5.2: Ontwikkeling materiaal

§ 5.2.1: Bestaand materiaal en literatuur

Voor de samenstelling van de lessenserie ben ik allereerst op zoek gegaan naar bestaand materiaal over Logica. Voor de gekozen specifieke doelgroep, Wiskunde A-leerlingen (4 vwo) met het profiel ‘Cultuur & Maatschappij’ of ‘Economie & Maatschappij’, is er helaas geen bestaand materiaal beschikbaar. Voor de Wiskunde B-leerlingen is er wel wat beschikbaar, maar het meeste materiaal is bedoeld voor het hoger onderwijs. In paragraaf 1.3.3 staat het materiaal dat ik gebruikt heb voor zelfstudie en voor de oriëntatie op logische vraagstukken en puzzels. Hieronder volgt een overzicht van de overige artikelen, syllabi, dictaten en boeken die ik bekeken heb:

- *De avonturen van Alice in Wonderland* [Carroll]

Lewis Carroll schreef als wiskundige in de negentiende eeuw verschillende boeken en artikelen over Logica. Zo verstopte hij ook in het boek *De avonturen van Alice in Wonderland* verschillende woordgrapjes en situaties die tegen ons gevoel ingaan. Bij dit boek heb ik ook de tekenfilm bekeken.

- *“From Common Sense to Formal Logic: Use of Logical Games for the Assessment, Investigation and Improvement of Logical Reasoning.”* [Chasiotis]

Dit artikel van een Griekse onderzoeker komt uit een congresbundel van CIEAEM (Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques) en bevat een aantal logische vraagstukken met rode en groene kaartjes die voor verschillende doeleinden gebruikt kunnen worden. Opdrachten rond deze kaartjes vormen de rode draad door de door mij ontwikkelde lessenserie.

- *Leren argumenteren met Vader en Zoon* [Eemeren]

Dit boekje bevat tientallen stripverhaaltjes van 'Vader en Zoon' van Peter van Straaten en is met de begeleidende teksten een spoedcursus Argumentatieleer. Een tweetal stripjes met als...dan...-beweringen zijn gebruikt in de lessenserie.

- *Denkende machines. Computers, rekenen, redeneren* [Eijck]

Het boekje *Denkende machines. Computers, rekenen, redeneren* is verschenen in de reeks Exact in Context voor gebruik in de Tweede Fase. Dit boekje bekijkt allerlei onderwerpen uit de informatica vanuit een historisch kader. Daarbij wordt ook de mechanisering van het redeneren besproken. Die paragraaf wordt voorafgegaan door een stukje Propositielogica met de nadruk op waarheidstabellen.

- *Logika voor AI. Werkboek* [Iemhoff]

Dit werkboek behoort bij een introductiecursus Logica van de Universiteit van Amsterdam en bevat een kort hoofdstuk over Propositielogica. In dat hoofdstuk komt vooral het vertalen van Nederlandse zinnen naar formules in de Propositielogica aan de orde. Daarbij ontbreekt natuurlijk niet *De prinses of de tijger* van Raymond Smullyan [Smullyan, “Lady”]. De opdrachten in de paragraaf over formules in de Propositielogica hebben voor inspiratie gezorgd voor les 6 in de lessenserie.

- *Bewijzen, bronnencursus 'bewijzen' LP de postkamer* [Swaen, “Bewijzen”]

Dit dictaat is geschreven voor de eerstejaars studenten van de tweedegraads lerarenopleiding Wiskunde van de Hogeschool van Amsterdam. De vereiste

voorkennis is havo Wiskunde B1. Elk hoofdstuk begint met een stuk theorie en voorbeelden en wordt afgesloten met interessante weetjes en (geschiedkundige) achtergrondinformatie in ‘ter zijde’ en een aantal vraagstukken. Dit dictaat begint met ‘Wat is een bewijs?’, maar werkt al snel via verzamelingen en als...dan...-beweringen naar de waarheidstabellen uit de Propositielogica toe. Het dictaat wordt afgesloten met bewijzen met volledige inductie.

Dit dictaat was een belangrijke handleiding voor de basiskennis die de leerlingen meekrijgen in de lessenserie. Ook de ter zijdes gaven nuttige informatie.

- *Logika, inleiding mathematische logika ten behoeve van het hoger beroepsonderwijs* [Swaen, “Logika”]

Dit dictaat wordt gebruikt bij de lerarenopleiding Wiskunde van de Hogeschool van Amsterdam. Het eerste gedeelte van het dictaat wordt gebruikt bij de tweedegraads opleiding, het laatste gedeelte bij eerstegraads lerarenopleiding. Het dictaat is overzichtelijk opgebouwd en aangevuld met functionele en aantrekkelijke afbeeldingen. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een aantal vraagstukken. Verder is er duidelijk sprake van een doorlopende leerlijn tussen de hoofdstukken.

In het dictaat worden onder andere de volgende onderwerpen behandeld: grafen, bomen, recursie, syntaxis en semantiek, Propositielogica, bewijzen uit het ongerijmde en de Predikatenlogica.

- *Getal & Ruimte 3V1* [Vuijk]

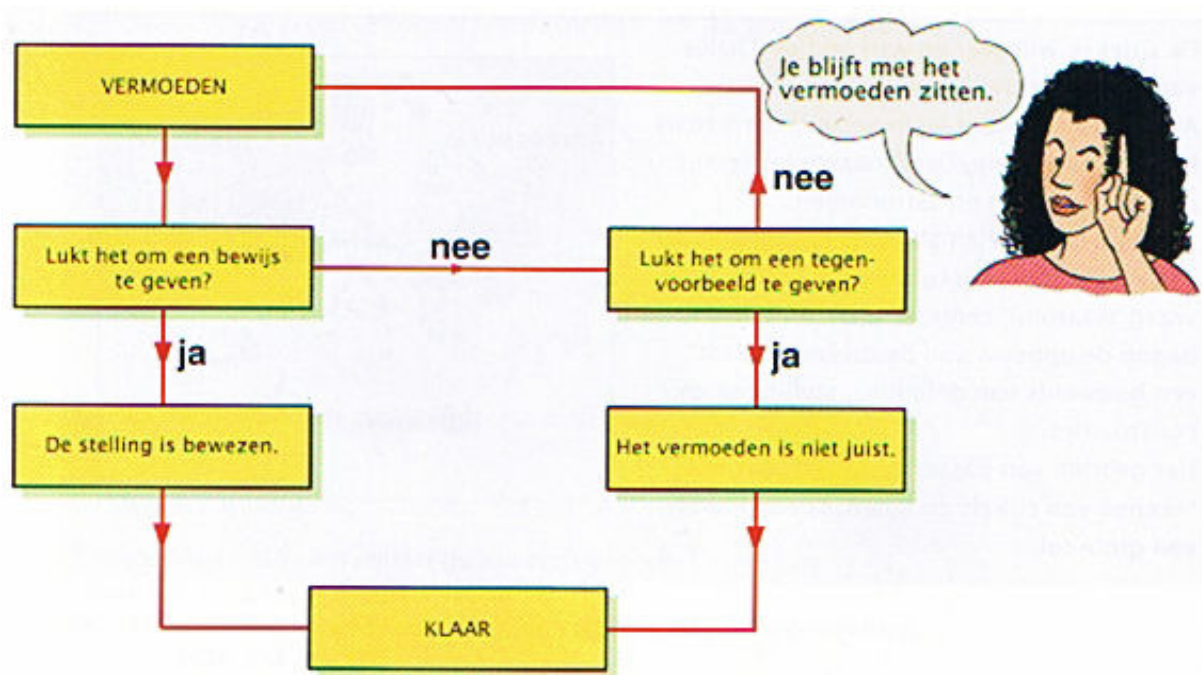
Paragraaf 2.4 heet ‘Redeneren en bewijzen’ en is de afsluiting van het hoofdstuk ‘Gelijkvormigheid’ waarin de vlakke meetkunde centraal staat. Via gestructureerde stappen worden vermoedens bewezen of weerlegd. Het schema in figuur 11 komt uit dit boek.

Deze paragraaf heeft als leidraad gediend voor de opzet van de lessen over vlakke meetkunde.

- Krantenartikelen uit de bijlagen ‘Opinie & Debat’ en ‘Wetenschap en Onderwijs’ van *NRC Handelsblad*.
- Artikelen uit *Euclides*, waaronder “*Bewijzen en Argumenteren*” [Swart].

- Artikelen uit *Pythagoras* (wiskundetijdschrift voor jongeren), waaronder:
 - “Drogredeneringen” [Boer]
 - “Katten, katten en katten” [Gijswijt]
 - “Logisch denken of rekenen” [Swaen, “Logisch”]

Een tweetal puzzels is verwerkt in de lessenserie.



figuur 11

§ 5.2.2: Interviews

Om een gefundeerd lespakket te kunnen samenstellen en ontwerpen, heb ik naast het bekijken van literatuur diverse experts geraadpleegd. Hieronder volgt een overzicht met samenvattingen van die gesprekken:

- Vincent Bekkering [Bekkering]
 Vincent Bekkering is verbonden aan het Praedinius Gymnasium in Groningen. Hij behandelt in 4 vwo de Syllogistiek van Aristoteles. In het verleden heeft een directe collega ook wel wat Propositielogica behandeld. Vincent Bekkering heeft de volgende ervaringen:
 - Bepaalde basisvaardigheden zijn goed aan te leren.

- Alfa-leerlingen kunnen goed zijn in Logica, maar deze leerlingen moeten wel sterk wennen aan het symboliseren. Dat is een struikelblok.
- Het is belangrijk om de leerlingen te laten zien ‘wat ze eraan hebben’; puzzelen om het puzzelen is onvoldoende. Argumentatieleer is geschikt.
- Een bèta-leerling houdt meer van de ‘Logica om de Logica’.
- Je moet maar gewoon wat mogelijkheden uitproberen.

- Barteld Kooi [Kooi]

Barteld Kooi is verbonden aan de faculteit Filosofie van de Rijksuniversiteit Groningen en is gepromoveerd bij Prof. Dr. G.R. Renardel de Lavalette. Op dit moment is hij postdoc Theoretische Filosofie en verzorgt hij de cursus ‘Logica 1’ bij Filosofie. Barteld Kooi vond het moeilijk om ideeën voor de doelgroep te formuleren. Kooi: “Leuke Logica is vaak filosofisch in plaats van wiskundig gericht. Logica als vak zegt eigenlijk alleen wanneer iets geldig is. Bij puzzelen, maar ook bij Informatica is het zelf maken/opzetten van redeneringen belangrijk. Je moet jezelf steeds de vraag stellen: ‘Wat wil ik mensen leren?’” Barteld Kooi legt voor 4 vwo de nadruk op een stukje argumentatieleer en noemde het boekje *Leren argumenteren met Vader en Zoon* [Eemeren] met bruikbare stripjes. Kooi: “Leerlingen leren zo kritisch nadenken. Dat is belangrijk! In kranten staan bijvoorbeeld regelmatig dingen die niet kloppen.” Verder stond in hoofdstuk 2 al, dat waarheidstabellen volgens Kooi nodig zijn om iets systematisch te leren, maar als vertrekpunt te droog zijn.

- Marco Swaen [Swaen, “E-mail”; Swaen, “Telefonisch”]

Marco Swaen is als docent Wiskunde verbonden aan het Calandlyceum in Amsterdam en aan de lerarenopleiding Wiskunde van de Hogeschool van Amsterdam. Ook is hij hoofdredacteur van het wiskundetijdschrift voor jongeren *Pythagoras*. Op het Calandlyceum geeft Marco Swaen onder andere Wiskunde A aan 4 vwo, maar hij geeft daar geen Logica. Op de lerarenopleiding komt Logica wel terug in een aantal cursussen. Hiervoor gebruikt hij zelfgeschreven dictaten [Swaen, “Bewijzen”; Swaen, “Logika”]. De dictaten heeft hij mij toegestuurd, evenals een artikel uit een congresbundel [Chasiotis].

Marco Swaen is enthousiast over dit project en geeft aan dat je dicht bij de belevingswereld van de leerlingen moet blijven. Het is voor Wiskunde A-leerlingen belangrijk dat ze het nut ervan inzien. Swaen: “Het moet vooral leuk zijn om logisch na te denken. Dat kan bereikt worden door puzzelachtig te beginnen. Het zou helemaal mooi zijn als die puzzels later met waarheidstabellen gemakkelijker zijn op te lossen.” Marco Swaen twijfelt wel even of de waarheidstabellen aan 4 vwo aangeboden moeten worden. Als snel concludeert hij dat de waarheidstabellen zeker het proberen waard zijn. Die conclusie wordt mede ondersteund door zijn argumenten uit hoofdstuk 2. Swaen: “Je moet een paar grappige dingen doen, maar je moet de leerlingen ook iets (aan)leren door een paar algoritmen.”

- Rineke Verbrugge [Verbrugge, “Persoonlijk”]

Rineke Verbrugge is verbonden aan de faculteit Kunstmatige Intelligentie van de Rijksuniversiteit Groningen, maar ze geeft ook colleges bij Filosofie en Alfa-informatica. Wegens omstandigheden heb ik haar pas na mijn lesopzet kunnen spreken. Uiteindelijk was dat een voordeel, want ze heeft hierdoor een versie van mijn eerste les tot in detail kunnen bekijken. Ze gaf aan dat Propositielogica een goede keuze is. Syllogismen zijn naar haar mening wat ouderwets. Ze waarschuwt wel voor protest bij de waarheidstabel voor als-dan: “Je kunt dan vragen: ‘Wanneer lieg ik in ieder geval niet?’” Verder vertelt Rineke Verbrugge dat ze tijdens voorlichtingsbijeenkomsten voor 6 vwo de ‘modderige kinderen’ (figuur 12) heeft uitgespeeld. Daarbij stellen gekleurde stickertjes modder of geen modder voor. Bij het spel kan allereerst één iemand modder hebben. In een tweede ronde kunnen twee leerlingen modder hebben. Eventueel kan de situatie waarbij drie leerlingen modder hebben ook nog uitgespeeld worden. Het is belangrijk om tussendoor duidelijk te reflecteren en alles strak te formuleren om te voorkomen dat het misgaat. In de lessenserie heb ik dit als klassenopdracht opgenomen in de vorm van ‘de wijze adviseurs’. Deze versie staat op pagina 114.

Modderige kinderen:

Een n aantal kinderen heeft stiekem in het modderige bos gespeeld. Hun vader had dit uitdrukkelijk verboden. In het spel zijn k van hen vies geworden en hebben modder op hun voorhoofd. De kinderen kunnen de modder op het voorhoofd van iemand anders zien, maar niet op dat van zichzelf. Vader roept de kinderen bij zich en zegt: "Ik zie dat ten minste één van jullie modder op zijn of haar voorhoofd heeft. Wie modder heeft, dient zo snel mogelijk naar voren te stappen." Mocht er niemand naar voren stappen, dan herhaalt vader zijn bevel net zo vaak totdat de kinderen met modder zich melden. Hoe vaak moet vader zijn bevel herhalen?

*figuur 12***§ 5.2.3: Randvoorwaarden**

Om de lessenserie goed aan te laten sluiten bij de pilot-klas is onderzoek naar hun voorkennis nodig. Zeker ook met het oog op eventuele vakkenintegratie, waar u in hoofdstuk 3 meer over kunt lezen. De pilot-klas is een Wiskunde A-cluster van het Rölingcollege, locatie Belcampo. Zij hebben allen het eerste semester van dit schooljaar een introductiecursus Filosofie gevolgd. Daarnaast hebben een aantal leerlingen het keuzevak Informatica. Bij Filosofie is er echter geen aandacht aan Logica besteed. Wel hebben de leerlingen in een werkstuk een standpunt met goede argumenten moeten verdedigen [Gottschal]. Ook bij Informatica komt Logica nauwelijks ter sprake. Vanwege tijdsdruk wordt de module 'logische schakelingen' daar nauwelijks tot niet behandeld.

§ 5.2.4: Keuzes lespakket

Gebaseerd op de raadgevingen van de experts heb ik een lessenserie ontworpen. De lessenserie 'Wiskunde & Filosofie: Logica' bestaat uit een achttal lessen en vier huiswerkopdrachten. In die lessen staat redeneren centraal. Vooral de als...dan...-beweringen worden vanuit diverse invalshoeken bekeken. De laatste drie lessen gaan over de Propositielogica waarbij naar de waarheidstabellen wordt toegewerkt. Wiskundige opgaven worden afgewisseld met puzzelachtige opgaven. Een terugkerend thema zijn de 'kaartjes' [Chasiotis], die als redeneerspel in de introductie van les 1 (pagina 97) staan. In de laatste les wordt een puzzel, die de

leerlingen eerder informeel in het huiswerk maakten, met waarheidstabellen opgelost. Voor een verdere beschrijving, doelstellingen en werkvormen verwijs ik naar bijlage C3: Docentenhandleiding. De bijbehorende lessen staan in bijlage C1.

Voor de huiswerkopdrachten is gekozen voor Brainbox. Leerlingen kunnen zo op elk gewenst moment hun huiswerkopdrachten inleveren. Door gebruik te maken van deze werkvorm, wordt de stof ook op een andere manier verwerkt. Door deze afwisseling wordt een optimale leersituatie gestimuleerd. Een export van de huiswerkopdrachten staat in bijlage C2.

§ 5.3: Pilot

§ 5.3.1: Ontwerpcycli voor het verbeteren van het lesmateriaal

Voordat het lesmateriaal de klas in ging, zijn de verschillende lessen en huiswerkopdrachten getest via een cyclus van iteratieve verbeteringen. Het schema van de diverse teststadia staat in paragraaf 1.3.2. De verschillende ronden hebben zinvolle verbeteringen opgeleverd, zowel wat de duur van de lessen betreft als de tekstuele verduidelijking van de uitlegblokken en vraagstelling. Bij de huiswerkopdrachten zijn hierdoor eventuele problemen met Brainbox ook tijdig gesignaleerd.

§ 5.3.2: Pilot in A4M

Op het Rölingcollege, locatie Belcampo was er één 4 vwo klas Wiskunde A: A4M. Deze klas gaf ik het gehele schooljaar zelf les, waardoor ik de leerlingen al kende voordat het project van start ging. Om dit project goed te laten slagen moest er wel wat stof verschoven worden. Dat kon alleen met een PTA (Programma van Toetsing en Afsluiting)-wijziging. Deze wijziging is in overleg met de betrokken teamleider en conrector doorgevoerd. Dit project staat daarin als handelingsdeel vermeld. In bijlage B staat verder de bijbehorende Studiewijzer voor de leerlingen.

§ 5.4: Lesverloop

De lessenserie Logica heb ik met plezier aan A4M gegeven. De leerlingen deden ook enthousiast mee. Dat in tegenstelling tot een aantal andere onderwerpen, die zij met frisse tegenzin doorgewerkt hebben. Wiskunde A is voor hen tenslotte een verplicht profielvak. Hieronder volgt een beschrijving van de lessen die op mijn eigen lesverslagen en één rapport van een observator – eerste scriptiebegeleider – is gebaseerd. De feedback van de leerlingen is terug te vinden in hoofdstuk 7.

Over het algemeen voldeed het materiaal aan de verwachtingen en kon alles binnen de lestijd worden doorgewerkt. Tijdens de lessen heb ik korte klassikale blokken afgewisseld met opdrachten. Afhankelijk van de opdracht hebben de leerlingen die zelfstandig dan wel samen gemaakt. Een aantal lessen heb ik de leerlingen aan de hand van de diagnostische toets of een huiswerkopdracht in tweetallen ingedeeld. Sommige leerlingen hadden bij enkele opgaven wat hints nodig. Deze hints zijn terug te vinden in de Docentenhandleiding (bijlage C3).

Inleiding

Het onjuiste syllogisme in de inleiding over eeuwig geluk en een broodje kaas, zorgde voor leuke reacties: “Ik kan niet zomaar kiezen tussen een broodje kaas of eeuwig geluk. Dat hangt ervan af. Na het uitgaan kies ik toch echt een broodje kaas.” En: “Dat niets klopt niet. Eerst zeg je dat er niets beter is en dan zeg je dat er toch iets beter is!”

Kaartjes

De kaartjes uit het kaartspel in les 1 vormen de rode draad door de lessenserie. De introductie met het kaartspel sloeg gelukkig aan. De door de docent samengestelde tweetallen wilden allemaal het winnende team zijn. Er werd flink geredeneerd: “We willen de eerste zien, want als die rood is, zijn ze allemaal rood.” En: “Nee, we willen de derde zien, want dan heb je een veel grotere kans.”

De eerste huiswerkopdracht waarin leerlingen moesten aangeven of gegeven rijtjes aan de regel voldeden, werd dan ook goed gemaakt. In de tweede huiswerkopdracht

waarin bij elk rijtje één van de vijf kaarten werd weggelaten, ging dat moeizamer. Bij deze opdracht was een klassikale nabespreking nodig. Later volgden nog formules en waarheidstabellen bij beweringen met de kaartjes.

Beweringen

De meeste leerlingen konden zonder problemen aangeven of een uitspraak wel of geen bewering was. In het huiswerk werden originele beweringen verzonnen: "Als FC Groningen zondag wint en FC Utrecht verliest, dan is FC Groningen verzekerd van Europees voetbal." En: "Als ik 1000m sprint, dan ben ik moe."

Meetkunde

De vlakke meetkunde sloot prima aan bij hun voorkennis uit de onderbouw. Het zoeken naar tegenvoorbeelden ging de meeste leerlingen goed af. In het huiswerk zorgde de vraag '*Kun je bij de bovenstaande bewering nu toch nog een tegenvoorbeeld geven?*' wel voor wat verwarring. Een aantal leerlingen ging op zoek naar een tegenvoorbeeld, terwijl zij de bewering in de voorafgaande opgave al bewezen hadden. Een tweetal kwam er niet uit en vroeg om hulp:

Docent: "Wat heb je bij vraag 1 gedaan?"

Leerling: "Ja, een bewijs geleverd voor elke driehoek."

Docent: "Dus..."

Leerling: "Oh ja, deze vraag is echt gemeen!!"

Het bewijs bij de stelling van Pythagoras is wat aan de moeilijke kant. Veel leerlingen gaan bij het algemene geval toch met getallen in plaats van letters verder. Ook blijkt het moeilijk om te verwoorden of aan te geven waarom het bewijs juist is.

De wijze adviseurs

De klassenopdracht bij de wijze adviseurs zorgde voor een aantrekkelijke afwisseling. De ronde met één zwarte stip ging goed. De leerlingen hadden snel door dat toen de adviseur met een zwarte stip naar voren stapte zij zelf geen zwarte stip hadden. De tweede ronde ging in eerste instantie even mis, omdat er slechts één adviseur naar voren stapte terwijl er twee zwarte stippen waren geplakt. De situatie met twee zwarte stippen is nog te begrijpen, maar al wat moeilijker te beschrijven. Dat lukte de leerlingen trouwens wel vrij goed. De bijbehorende huiswerkopdracht

was echter voor veel leerlingen te moeilijk. Daarin moest de situatie voor drie zwarte stippen worden beschreven. Toch is het wel goed om leerlingen hier even over na te laten denken.

Als-dan

De stripjes van Peter van Straaten bij als-dan zorgden voor interessante discussies. De leerlingen werden zich hierdoor bewust van het feit dat ze als...dan...-beweringen niet zomaar kunnen omdraaien. In les 5 (opdracht 17 en 18) kwamen de leerlingen bij de concrete zinnen tot het inzicht dat hun intuïtief geformuleerde conclusies bij als...dan...-beweringen inderdaad onjuist waren.

Formules in de Propositielogica

Het samenstellen van formules in de Propositielogica gaat de meeste leerlingen gemakkelijk af. Een leerlinge die een aantal lessen gemist had, zag zelfs een equivalentie in opgave 22d die daar nog niet gevraagd werd.

Waarheidstabellen

Helaas was er voor de waarheidstabellen wat te weinig tijd. Les 7 kan beter gespreid worden over twee lessen. De tabellen werden in eerste instantie klassikaal ingevuld, maar het aanleren van het algoritme kost sommige leerlingen zichtbaar moeite. Hierdoor was er voor hen te weinig tijd voor voldoende oefening. Als er geen extra les beschikbaar is, kan er bezuinigd worden op andere onderwerpen. Meer details staan in de Docentenhandleiding.

Tot slot

De leerlingen zijn verrast met de oplossingsmethode voor de puzzel uit een huiswerkopdracht met behulp van waarheidstabellen. Leerlingen met een informeel gegeven onjuiste oplossing, zagen nu dat er slechts één juiste oplossing was.

Brainbox

De meeste leerlingen hebben hun huiswerkopdrachten op tijd via Brainbox ingeleverd. De mentor van A4M vertelde na een mentoruur: "Ze vinden die Logica echt leuk. Ze hadden het over die Brainboxopdrachten. Dat dat wel goed ging."

Conclusie:

De lessenserie is volgend jaar voor herhaling vatbaar! In mijn klas zal ik zeker zorgen voor ruimte in het programma. Een aantal leerlingen uit atheneum 5 gaf de volgende reactie: “Waarom doet u in atheneum 4 allemaal leuke dingen. Dat hebben wij niet gehad.”

§ 5.5: Mogelijkheden voor leerlingen met Wiskunde B

Dit lespakket is in eerste instantie geschreven voor Wiskunde A-leerlingen, maar kan ook voor de Wiskunde B-leerlingen gebruikt worden. Voor de B-leerlingen kunnen stukken van de vlakke meetkunde sneller worden doorgewerkt of eventueel worden overgeslagen. Hierdoor ontstaat er meer tijd voor de waarheidstabellen, die voor de Wiskunde B-leerlingen verder uitgebreid kunnen worden.

Voor de wat betere leerlingen zijn delen uit het boekje *Denkende machines. Computers, rekenen, redeneren* [Eijck] geschikt. De leerlingen worden daarin flink uitgedaagd. Een koppeling met het vak Informatica wordt daarbij aanbevolen. Helaas heb ik tot op heden geen ervaringen van docenten kunnen verzamelen.

Ook is het mogelijk regels voor het opstellen van het computerprogramma achter het televisieprogramma Lingo te bekijken. Daarbij wordt een koppeling met het vak Informatica aanbevolen. Ideeën wat Lingo betreft zijn terug te vinden in het boekje *Logica in de praktijk* [Thijsse].

Wellicht kan er tevens voorzichtig naar de Predikatenlogica gekeken worden via het computerprogramma ‘Tarski’s World’. Via internet is er verschillend materiaal beschikbaar.⁶

⁶ De Katholieke Universiteit Leuven biedt oefeningen aan via:
<http://wis.kuleuven.be/algebra/OEF-Tarski-Kortrijk.PDF>

Hoofdstuk 6:

Derde onderzoekscomponent: Posttest (Eindtoets)

§ 6.1: Verantwoording

Na de de lessenserie in A4M hebben de leerlingen de diagnostische toets nogmaals gemaakt. Er is bewust gekozen voor dezelfde toets. Door deze keuze kunnen de resultaten van deze posttest goed vergeleken worden met de pretest. Dit voordeel weegt zwaarder dan het eventuele nadeel van dezelfde toets. Bovendien werd de pretest een aantal weken vóór de lessenserie afgenomen, waardoor er tussen de pretest en de posttest ruim twee maanden zat. Daarnaast werd de posttest ook beoordeeld als handelingsdeel dat voldoende moest worden afgesloten. De kans dat leerlingen de toets op herkenning zouden invullen is dus tot een minimum beperkt gebleven. De toetsvragen en de bijbehorende uitwerkingen staan in bijlage A.

§ 6.2: Resultaten

In tabel 7 staan de resultaten van de pretest en de posttest naast elkaar. De tabel geeft de percentages van het aantal goede antwoorden per vraag. Met uitzondering van vraag vijf zijn alle vragen beter gemaakt; gemiddeld met 10%. Daarmee zijn de Wiskunde A-leerlingen beter geworden dan de Wiskunde B-leerlingen. Bij vraag vijf kiezen in verhouding veel leerlingen in de posttest veiligheidshalve voor 'Dat kun je niet weten'. Maar al met al heeft de lessenserie een positieve invloed gehad op de prestaties.

Vraag zes tot en met elf zullen weer nader bekeken worden. Te beginnen met vraag zes: In tabel 8 staan de percentages van de gegeven antwoorden op deze vraag van zowel de pre- als posttest. Ook zijn de percentages van de studenten Geschiedenis uit het in paragraaf 4.2 besproken Engelse onderzoek [Inglis, "Mathematicians"] erbij

afgedrukt. Tabel 9 geeft aan hoeveel procent van de leerlingen een bepaalde kaart selecteert; wederom van zowel de pre- en posttest als van de studenten Geschiedenis. Tabel 8 laat zien dat beduidend minder leerlingen de combinatie 'D en 3' kiezen en dat zelfs twee leerlingen tot het logisch juiste antwoord 'D en 7' komen. Een aantal leerlingen kiest het meest veilige antwoord: alleen kaart 'D'. Zij weten in ieder geval dat de bewering niet zomaar omgedraaid mag worden, maar vergeten *modus tollens*. Tabel 9 laat de daling bij 'omgekeerde' ook zien. Daarnaast is er een lichte stijging bij '*modus tollens*'. De lessenserie heeft dus een verschuiving opgeleverd. Daarnaast zijn de leerlingen zeer vergelijkbaar met de studenten Geschiedenis. De percentages van de posttest en studenten Geschiedenis komen in tabel 8 en 9 grotendeels overeen. De bovengenoemde verschuiving en de vergelijking met studenten Geschiedenis laat zien dat de lessenserie een positief effect heeft gehad.

Vraag	Pretest A4M: 18 leerlingen	Posttest A4M: 18 leerlingen
2 (volgende plaatje)	94%	94%
3 (volgende plaatje)	61%	78%
4 (gewicht dozen)	78%	100%
5 (cadeau)	72%	61%
6 (kaartjes)	0%	11%
7 (beweringen)	39%	50%
8 (getallenpaar)	67%	72%
9 (tegenvoorbeeld)	74%	92%
10 (bewijs)	21%	41%
11 (herhaling vraag 7)	72%	83%
gemiddeld	58%	68%

tabel 7

	Pretest A4M: 18 leerlingen	Posttest A4M: 18 leerlingen	Studenten Geschiedenis
D	11%	22%	22%
D en K	0%	0%	0%
D en 3	67%	39%	33%
D en 7	0%	11%	8%
D, K en 3	0%	0%	2%
D, K en 7	11%	6%	1%
D, 3 en 7	0%	0%	7%
K, 3 en 7	6%	6%	9%
D, K, 3 en 7	6%	17%	19%

tabel 8

	Pretest A4M: 18 leerlingen	Posttest A4M: 18 leerlingen	Studenten Geschiedenis	Denkwijze
D	94%	94%	91%	modus ponens
K	22%	28%	26%	ontkenning van antecedent
3	78%	61%	62%	omgekeerde
7	22%	33%	40%	modus tollens

tabel 9

De vergelijking van de resultaten tussen de pre- en posttest van vraag zeven tot en elf staat in tabel 10. Hieruit blijkt dat leerlingen in de posttest beter overweg kunnen met als...dan...-beweringen, maar intuïtief nog snel fouten maken. Het geven van een tegenvoorbeeld is voor bijna niemand meer een probleem. Daarnaast kunnen meer leerlingen een informeel bewijs geven. Ook hieruit blijkt dat de lessenserie een positief effect heeft gehad.

	Pretest A4M: 18 leerlingen	Posttest A4M: 18 leerlingen	Toelichting
L1a (vraag 7)	39%	50%	De helft van de leerlingen ziet dat je als...dan...-beweringen niet zomaar mag omdraaien. Toch denkt de andere helft in eerste instantie nog steeds dat de beweringen hetzelfde zeggen.
L1b (vraag 8)	67%	72%	Bijna driekwart van de leerlingen kiest de juiste uitspraak. Opvallend is de verschuiving van een drietal leerlingen naar het foute antwoord: 'som is oneven'. Twee van hen kozen tijdens de pretest wel voor het goede antwoord.
L1c (vraag 9)	74%*	92%*	Bijna iedereen is nu in staat een tegenvoorbeeld te vinden en dat goed te verwoorden.
L1d (vraag 10)	21%*	41%*	22% van de leerlingen geeft nu een geheel juiste algemene redenering (was 6%). Leerlingen die dat nog niet lukt, maar wel de juiste conclusie trekken, formuleren hun antwoord wel beter. Bijvoorbeeld: 'er zijn geen getallen te bedenken waarbij dit niet voorkomt', 'zie de voorbeelden die dat bewijzen' en 'er zijn geen tegenvoorbeelden'.
L1a-2 (vraag 11)	72%	83%	In zowel de pretest als de posttest verbetert 33% van de leerlingen zijn of haar antwoord op vraag L1a na de deelvragen b , c en d . Slechts een klein percentage denkt nog steeds dat de beweringen hetzelfde zeggen. Zij trokken bij d dan ook verkeerde conclusies.

* Bij vraag L1c en L1d zijn bij gedeeltelijk goede tegenvoorbeelden en bewijzen deelpunten toegekend. Deze deelpunten zijn als volgt meegenomen in de percentages: bij L1c weegt een juiste conclusie, maar incomplete verklaring voor de helft. Bij L1d weegt een juiste conclusie met meerdere juiste voorbeelden voor de helft; een juiste conclusie met maar één juist voorbeeld weegt voor $\frac{1}{5}$ deel. tabel 10

Conclusie:

De 4 vwo-leerlingen zijn door de lessenserie beter gaan redeneren. Intuïtief maken ze echter nog snel fouten bij als...dan...-beweringen, maar ze zijn zich er wel van bewust dat ze met als...dan...-beweringen moeten oppassen. Het niveau van de leerlingen is na de lessenserie van vier weken vergelijkbaar met dat van studenten Geschiedenis. Hierdoor draait ongeveer de helft van de leerlingen een als...dan...-bewering niet zomaar meer om. Verder zijn bijna alle leerlingen in staat tegenvoorbeelden te zoeken en deze op een juiste manier te formuleren. Het geven van een informeel bewijs blijft echter lastiger, maar veel leerlingen weten nu wel wat daarbij van hen verwacht wordt.

Hoofdstuk 7:

Vierde onderzoekscomponent: Leerlingenfeedback

§ 7.1: Inleiding

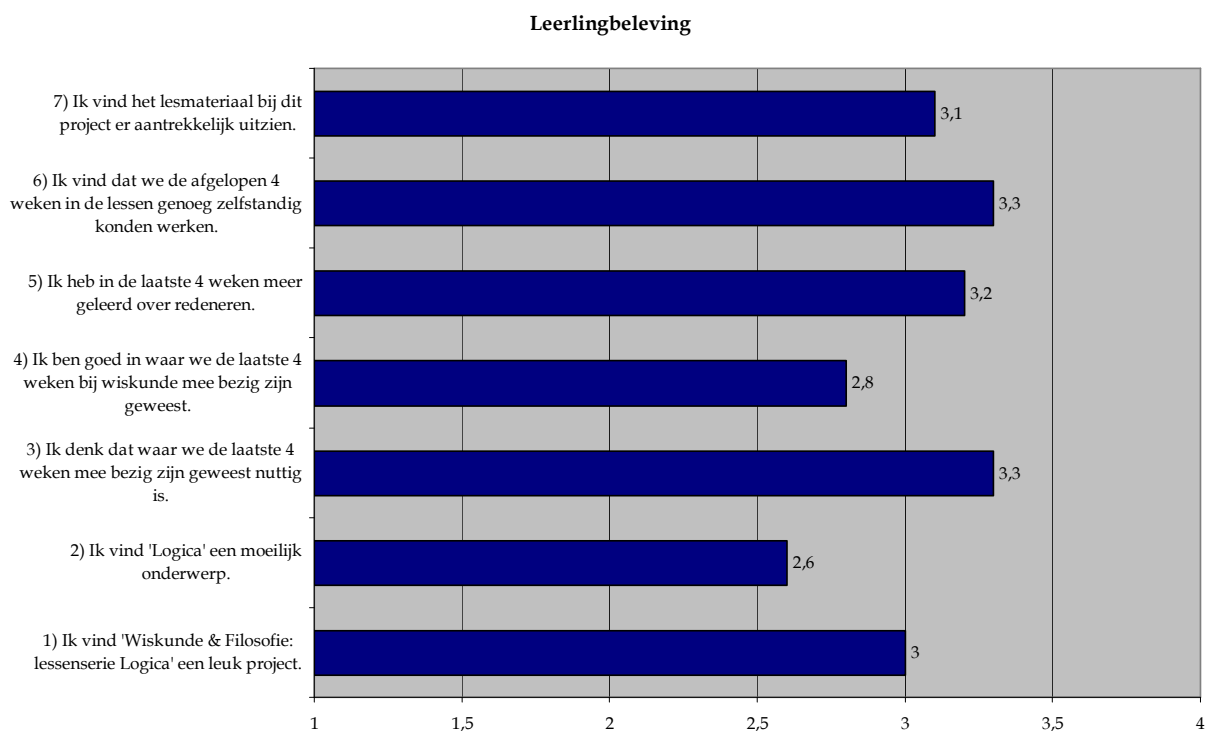
De hoofdvraag uit hoofdstuk 1 kan alleen goed beantwoord worden als in het antwoord ook leerlingenfeedback wordt meegenomen. Naast de feedback via lesobservaties heb ik na de eindtoets een enquête en twee interviews afgenomen. De vragen van deze enquête staan in bijlage D en de uitkomsten in paragraaf 7.2. In paragraaf 7.3 vindt u de twee leerlingeninterviews.

§ 7.2: Enquête

De enquête *‘Wat vind je van Logica?’* bestaat uit vijftien vragen en is via Brainbox afgenomen. De vragen zijn te verdelen in vier categorieën:

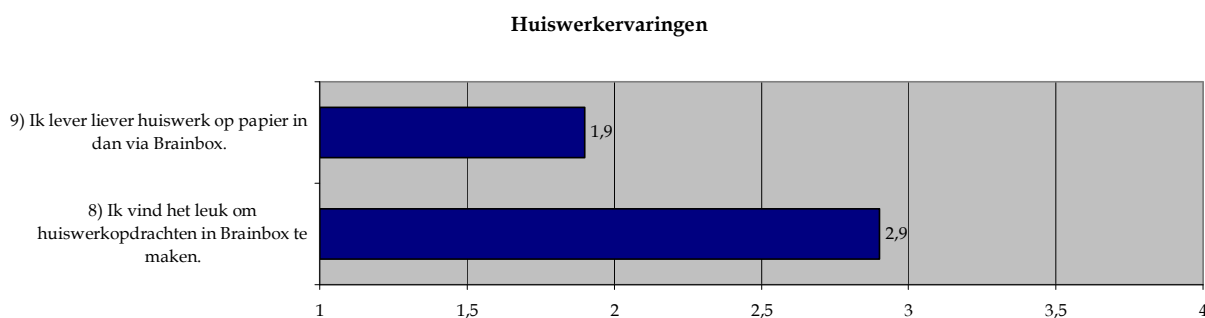
- 1) leerlingbeleving van de lessenserie (vraag 1 tot en met 7)
- 2) huiswerkervaringen (vraag 8 en 9)
- 3) Logica in vergelijking met het vak Wiskunde (vraag 10 tot en met 14)
- 4) overige opmerkingen (vraag 15, open vraag)

Bij de meeste vragen hadden de leerlingen vier keuzes: ‘helemaal mee eens’, ‘wel een beetje mee eens’, ‘niet zo mee eens’ en ‘helemaal niet mee eens’. Bij de verwerking van de enquête kreeg het antwoord ‘helemaal mee eens’ vier punten, het antwoord ‘wel een beetje mee eens’ drie punten, ‘niet zo mee eens’ twee punten en ‘helemaal niet mee eens’ één punt. In figuur 13 staan de uitkomsten van de eerste categorie. Hieruit blijkt dat de leerlingen het project over het algemeen positief beoordelen. Het onderwerp zien de leerlingen als nuttig en zij geven aan meer geleerd te hebben over redeneren. Daarnaast vindt een ruime meerderheid dat het lesmateriaal er aantrekkelijk uitziet. Wel wordt het onderwerp ‘Logica’ door velen als vrij moeilijk ervaren.



figuur 13

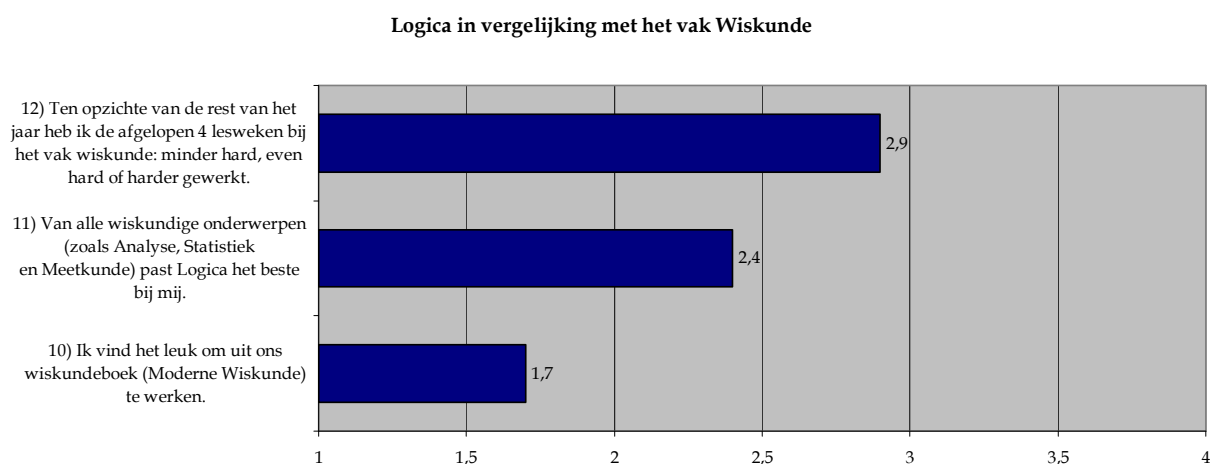
In figuur 14 staan de uitkomsten van de tweede categorie. Leerlingen blijken het maken van huiswerkopdrachten via Brainbox over het algemeen te waarderen, maar de uitkomsten laten ook zien dat leerlingen liever helemaal geen huiswerk krijgen.



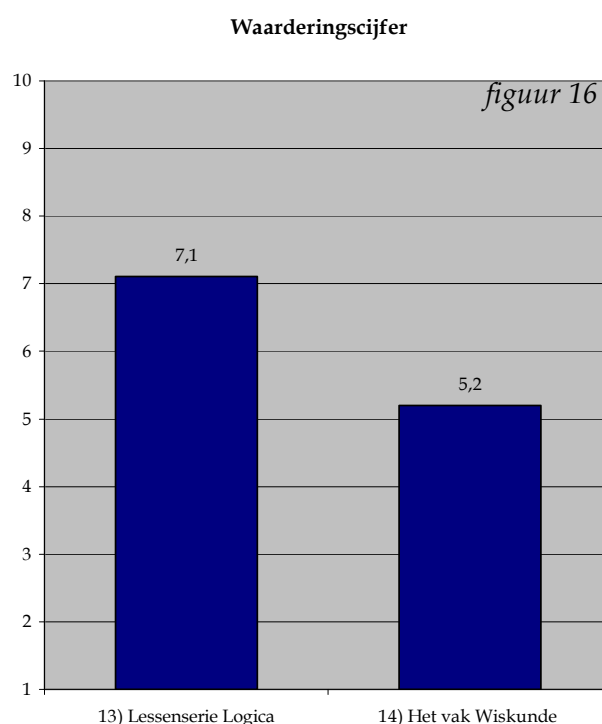
figuur 14

De uitkomsten van de derde categorie staan in figuur 15 en 16. Bij vraag dertien hadden de leerlingen de keuze uit 'minder hard gewerkt', 'even hard gewerkt' en 'harder gewerkt'. Deze antwoorden kregen respectievelijk de puntenaantallen één, tweeënhalve en vier. Hierdoor is deze vraag met de andere vragen te vergelijken. De meeste leerlingen (61%) hebben voor dit project even hard gewerkt als de rest van

het jaar, maar een aantal (33%) geeft aan harder te hebben gewerkt. Verder geeft bijna de helft van de leerlingen aan dat ‘Logica’ van alle wiskundige onderwerpen het beste bij ze past. De lessenserie Logica was wat taliger dan de andere onderwerpen van dit schooljaar, waardoor de lessen waarschijnlijk beter aansloten bij hun profielkeuze. De lessenserie is tenslotte gegeven aan leerlingen met wiskunde A, die voor een alfa-profiel gekozen hebben. Dit argument wordt ondersteund door de waardering voor het vak Wiskunde in vergelijking met de waardering voor de lessenserie Logica. Eén leerling schrijft bij de laatste vraag – vierde categorie – dan ook: “Wiskunde moet je nou eenmaal volgen en kunnen voor je vervolgopleidingen.”



figuur 15



figuur 16

Andere reacties:

Een aantal leerlingen geeft alleen de korte reactie: “Ik vond dit leuk”. Een tweetal leerlingen geeft ook een toelichting:

- “Ik vind wiskunde normaal helemaal niks aan, want het interesseert me niet echt. Maar ik vond de afgelopen vier weken wel leuk en was meer gemotiveerd, omdat ik deze manier van lesgeven en de stof veel leuker vond en daarom ook beter m’n best deed. Ik hoop dat we in het vervolg (rest van de jaren dat ik hier nog op school zit) vaker dit soort lessen krijgen. Het is véél leuker!!”
- “Ik vond het een leuk project, omdat het weer eens wat anders is dan elke les eerst uitleg te krijgen en de rest van de les aan je huiswerk te spenderen. Ik vond het ook veel makkelijker dan wiskunde uit het boek, omdat het hier meer in ‘verhaaltjes’ werd gebracht. Dat leert voor mij makkelijker.”

Zoals ik in paragraaf 5.4 al beschreven heb, moest er aan het eind van de lessenserie strak gepland worden. Dat leverde enige tijdsdruk op, die een leerling als volgt verwoordt:

- “Ik vond het wel leuk om te doen, ik vond het alleen jammer dat er heel veel in één les gedaan moest worden. Ik had vaak het idee dat we net te weinig tijd hadden, en dat er dus nét wat teveel in één les moest gebeuren.”

Conclusie:

De uitkomsten van deze enquête geven aan dat de lessenserie Logica wat de leerlingen betreft een succes genoemd mag worden. De hoeveelheid stof mag misschien wel wat minder, of er moeten meer lessen voor uitgetrokken worden. Dit project is zeker voor herhaling vatbaar.

§ 7.3: Interviews

Twee leerlingen behaalden bij de pretest een score die tegengesteld was aan hun normale resultaten bij Wiskunde. Pieter, met diepe onvoldoendes voor het vak Wiskunde vanwege een enorme achterstand wat Analyse betreft, had bij de pretest 82% van de vragen goed. Bij de posttest behaalde hij zelfs een score van 89%. Carla, die normaal gesproken goede cijfers haalt, had bij de pretest slechts 22% van de vragen goed. Bij de posttest behaalde zij wel een score van 75%. Hierdoor heb ik deze twee leerlingen na afloop van het project geïnterviewd om de door hen gevolgde redeneringen nader te bekijken.⁷

Pieter geeft aan dat hij het leuk vindt om logische puzzels te maken. In klas één en twee was hij ook goed in Wiskunde. Daarna ging het bergafwaarts. Hij geeft aan dat hij het nut van de werklessen Wiskunde in het studiehuis te laat ontdekt heeft: “In die lessen kan ik mijn aandacht er beter bijhouden vanwege de persoonlijke benadering. Dat werkt motiverend ondanks mijn slechte cijfers.” De lessenserie Logica vond Pieter leuk: “Deze wiskunde is wat speelser. Analyse komt op mij niet boeiend over: te veel regeltjes.” Bij de opgave met de kaartjes uit de pre- en posttest geeft Pieter tijdens het interview aan dat hij de opgave niet goed gelezen heeft. Hierdoor verandert hij zijn keuze van ‘D, K en 7’ in ‘D en 7’.

Carla geeft in eerste instantie aan dat zij het verband tussen de lessen en de toets niet ziet: “In de les hadden we veel als...dan...-beweringen en kaartjes, oh ja, dat zat eigenlijk ook wel in de toets ja.” Op de vraag of de lessen aangepast moeten worden, geeft ze een kort antwoord: “Nee, niets aan veranderen.” Omdat Carla de toets na de lessenserie een stuk beter gemaakt heeft, worden de vragen nogmaals mondeling doorgelopen. Bij vraag drie had ze bij de pretest het antwoord gegokt, bij de posttest zag ze een patroon bij de eerste twee figuurtjes dat ze doorzette naar figuur drie en vier en de vraag daardoor dus goed beantwoordde.

⁷ Om anonimiteit van deze twee leerlingen te waarborgen zijn hun namen gefingeerd.

Bij vraag vier redeneerde Carla tijdens de pretest als volgt: R had een vierkantje en een driehoekje, Q een rondje, de gevraagde doos bevatte ze alledrie, dus moest hij daar maar tussen. Bij de posttest had ze wat beter gekeken: een driehoekje kan niet zwaarder zijn dan een rondje en een rondje niet zwaarder dan een vierkantje. Met deze redenering komt ze gelukkig wel tot het juiste antwoord.

Bij vraag vijf was Carla tijdens de posttest alle kinderen wat liegen betreft langsgegaan en kwam tot het juiste antwoord. Tijdens de pretest had ze geen idee hoe ze de opgave aan moest pakken.

Bij vraag zes heeft Carla bij de posttest door, dat de regel maar één kant uitgaat. In de pretest gaf ze het antwoord 'D en 3', in de posttest 'D'. Op mijn vraag 'Wat mag er niet op de kaart met een 7 staan?' antwoordt ze: "Ja, een D, maar je keert alleen kaarten met een letter om, dus je hoeft niet naar de 7 te kijken." De als...dan...-redenering wordt hier dus toch nog niet helemaal begrepen.

Het tegenvoorbeeld bij de bewering uit vraag negen kan Carla in de posttest wel vinden, terwijl ze in de pretest nog aangaf dat de gegeven bewering waar was. Dat deed ze door een aantal juiste voorbeelden op te sommen. Het bewijsje in vraag tien lukt echter nog niet. Het vinden van een tegenvoorbeeld evenmin.

Conclusie:

Ook uit de interviews blijkt dat de lessenserie wat de leerlingen betreft een succes is, maar er kan nog veel meer geleerd worden over redeneren. Verder hechten de leerlingen belang aan een persoonlijke benadering, die ze tijdens de lessenserie Logica wel ervoeren, maar die tijdens de gewone lessen meer aandacht mag krijgen.

Hoofdstuk 8: Samenvatting, conclusies en aanbevelingen

Deze scriptie beoogt een antwoord te geven op de vraag in hoeverre het mogelijk is om in 4 vwo Logica-les te geven. Daarbij is gekeken naar een specifieke doelgroep: leerlingen met Wiskunde A; de zogenaamde alfa-leerlingen. Om dit onderzoek een goed fundament te geven, heb ik verschillende bronnen geraadpleegd. Daarnaast heb ik diverse experts benaderd. De experts die gereageerd hebben gaven constructieve feedback en zinvolle ideeën. Ook is er gekeken naar mogelijkheden voor Logica binnen de niet-Wiskunde schoolvakken en binnen het vak Wiskunde.

Mijn onderzoek bestond uiteindelijk uit vier onderzoekscomponenten: pretest, pilot, posttest en leerlingenfeedback. Voordat het materiaal behorend bij deze componenten de klas in ging, is het uitgebreid getest via een cyclus van iteratieve verbeteringen.

Conclusies:

Er zijn positieve ervaringen opgedaan met het geven van Logica-les in 4 vwo. Het project mag dan ook een succes genoemd worden:

- De toetsresultaten van de leerlingen zijn na de lessenserie verbeterd. Na vier weken les scoren de wiskunde A-leerlingen bij de posttest beter dan de Wiskunde B-leerlingen bij de pretest. De resultaten van de Wason-test zijn zelfs vergelijkbaar met die van studenten Geschiedenis uit een Engels onderzoek.
- De lesobservaties geven aan dat de meeste leerlingen de lessen enthousiast hebben doorgewerkt. Ook was er voldoende afwisseling van werkvormen.
- De uitkomsten van de leerlingenenquête en interviews geven aan dat de lessenserie de leerlingen aansprak en dat ze het gevoel kregen wat geleerd te hebben. Logica, als onderdeel van het vak Wiskunde, wordt dan ook positiever beoordeeld dan andere onderwerpen.

Jammer genoeg bleek dat, ondanks tests wat tijdsduur betreft, er voor sommige lessen net wat tijd te kort was. Een volgende keer kunnen er voor deze lessenserie beter tien lessen uitgetrokken worden. Ook kan er eventueel stof geschrapt worden.

Aanbevelingen:**• Onderwijsinhoudelijk en aanpak:**

- Logica biedt een afwisseling binnen het lesprogramma Wiskunde A voor 4 vwo.
- Logica is een geschikt onderwerp om leerlingen te motiveren voor het vak Wiskunde A.
- Door voor aanvang van de lessenserie een voorkennistoets af te nemen, kan vooruitgang van de leerlingen objectief gemeten worden.
- Mits de docent tijd heeft, zijn extra ronden voor het testen van lesmateriaal nuttig om de laatste hobbels weg te nemen en de tijdsinschatting te verbeteren.

• Toekomstig onderzoek:

- Wat zijn de verschillen tussen Wiskunde A- en Wiskunde B-leerlingen? Daarbij kan niet alleen naar het leerplan gekeken worden, maar ook naar verschillen in aanpak van opgaven: Waarom maakt een Wiskunde A-leerling een bepaalde opgave beter dan een Wiskunde B-leerling? En waarom is dat bij een ander type opgave net andersom?
- Welke Logica hebben vwo-leerlingen nodig voor vervolgopleidingen? Wat zijn specifieke redeneringen die daar gebruikt worden?

• Politiek en beleidsmakers:

- Uit de in deze scriptie opgedane ervaringen blijkt, dat Logica binnen de nieuwe vakken Wiskunde C en Wiskunde D prima een plaats kan krijgen als (keuze)onderwerp.
- Leraren hebben meer tijd nodig voor het ontwikkelen van lesmateriaal. Die tijd kan door middel van taakuren beschikbaar gesteld worden. Ook kan de lesopslag verhoogd worden, waardoor leraren minder lesuren ingeroosterd worden.

Referenties

- "2e fase VWO." Tweede Fase Adviespunt. 17 februari 2006. 28 mei 2006
<<http://www.tweedefase-loket.nl/doc/schema-2efasevwofeb2006.pdf>>.
- Barwise, Jon en John Etchemendy. The Language of First-Order Logic. Tarski's
World 4.0. Stanford, USA: Center for the Study of Language and Information,
1992.
- Bekkering, Vincent. Telefonisch interview. 20 maart 2006.
- Bergervoet, Paul. Informatica. Theorieboek deel 1. Meppel: Edu'Actief, 2001.
- Boer, André de. "Drogredeneringen." Pythagoras. Homepage. Mathematisch
Instituut Universiteit Leiden. 30 december 2005
<<http://www.pythagoras.nu/mmmcms/public/sectie13.html>>.
- Braet, Antoine. Taaldaden VWO 2. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1991.
- Carroll, Lewis. De avonturen van Alice in Wonderland. Amsterdam: Van Goor, 1989.
- Chasiotis, Christos. "From Common Sense to Formal Logic: Use of Logical Games for
the Assessment, Investigation and Improvement of Logical Reasoning."
Congresbundel 47ste conferentie van CIEAEM. Berlijn: Freie Universität, 1995:
440-47.
- Devlin, Keith. Das Mathe-Gen. München: Deutscher Taschenbuch Verlag, 2003.
- Ditmarsch, Hans P. van en Barteld P. Kooi. "Speltheorie en Logica." Algemeen
Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte 94.1 (2002): 31-43
- Eemeren, F.H. van, R. Grootendorst en Peter van Straaten. Leren argumenteren met
Vader en Zoon. Amsterdam: Contact, 1996.
- Eijck, Jan van, Jan Jaspers, Jan Ketting en Marc Pauly. Denkende machines.
Computers, rekenen, redeneren. Amsterdam: Amsterdam University Press,
2002.
- "Examenprogramma's 2e fase per vak." Nederlandse Vereniging van
Wiskundeleraren. 12 oktober 2003. 28 mei 2006
<<http://www.nvbw.nl/examenprogramma's/ex-overz2.htm>>.

- Gardner, Martin. Gotcha. Paradoxes to puzzle and delight. New York: W. H. Freeman and Company, 1982.
- Gijswijt, Dion. "Katten, katten en katten." Pythagoras 37.3 (1998): 28.
- Gottschal, Peter, Ed. Filosofie: Een introductie voor atheneum 4. Groningen: Belcampo, 2005.
- Hiele, P.M. van, K. Kok en H.N. Schuring. Van a tot z: werkboek der wiskunde voor vwo. Purmerend: Muusses, 1972.
- Hofstadter, Douglas R. Gödel, Escher, Bach: een eeuwige gouden band. Amsterdam: Uitgeverij Contact, 1985.
- Horst, Stephan van der. "Logica - Een kennismaking. Lesbrief bij LogSim." Informatica in het voortgezet onderwijs. 16 juni 2003. 21 februari 2006 <<http://www.informaticavo.nl/scripts/lesmateriaal.php#29>>.
- Hoyles, Celia en Dietmar Küchemann. "Students' Understanding of Logical Implication" Educational Studies in Mathematics 51 (2002): 193-223.
- Iemhoff, Rosalie, Dick de Jongh en Marco Vervoort. Logika voor AI. Werkboek. Amsterdam: Faculteit NWI Universiteit van Amsterdam, 2002. Homepage. 2 september 2002. 30 december 2005 <<http://staff.science.uva.nl/~vervoort/LAI/werkboek.pdf>>.
- Inglis, Matthew en Adrian Simpson. "Mathematicians and the Selection Task." PME 28.3 (2004): 89-96.
- Inglis, Matthew en Adrian Simpson. "The Role of Mathematical Context in Evaluating Conditional Statements." PME 30.3 (in press).
- Kooi, Barteld P. Persoonlijk interview. 17 januari 2006.
- Krabbe, Erik C.W. en Phoebe Kradavis. Logica 1: Argument en Dialoog, gevolgd door Parvulae Logicales: Inleiding en Syllogistiek. Groningen: Faculteit der Wijsbegeerte Rijksuniversiteit Groningen, 2005.
- Krabbe, Erik C.W., ed. Logica 3: Model, Oneindigheid en Paradox. Groningen: Faculteit der Wijsbegeerte Rijksuniversiteit Groningen, 2005.
- Krooshof, G., et al. Moderne Wiskunde voor voortgezet onderwijs, deel 6 voor vwo. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1978.

- "Links Rechts." NRC Handelsblad 25 februari 2006: 45.
- O'Brien, Thomas C., Bernard J. Shapiro en Norma C. Reali. "Logical Thinking – Language and Context." Educational Studies in Mathematics 4 (1971): 201-19.
- Renardel de Lavalette, Gerard R. Colloquium Logica. Rijksuniversiteit Groningen. Groningen, 1 december 2005.
- Roberts, Tim S. "A ham sandwich is better than nothing: Some thoughts about transitivity." Australian Senior Mathematics Journal 18.2: 60-64.
- Ross, Kenneth A. en Charles R.B. Wright. Discrete Mathematics. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, 2003.
- Simola, Pentti. "Logisch redeneren." 123 test. Homepage. Mensa Finland. 6 november 2005 <<http://www.123test.nl/redeneren/>>.
- Smullyan, Raymond. Forever undecided. A Puzzle Guide to Gödel. New York: Alfred A. Knopf, 1987.
- Smullyan, Raymond. The Lady or the Tiger and Other Logical Puzzles. Harmondsworth, Middlesex, England: Penguin Books Ltd, 1982.
- Smullyan, Raymond. To Mock a Mockingbird. New York: Alfred A. Knopf, 1985.
- Smullyan, Raymond. What is the Name of this Book? Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1978.
- Stewart, Ian. Math Hysteria. Fun and games with mathematics. Oxford: Oxford University Press, 2004.
- Swaen, Marco. Bewijzen, bronnencursus 'bewijzen' LP de postkamer. Amsterdam: Hogeschool van Amsterdam, 1997.
- Swaen, Marco. E-mail interview. 25 januari – 1 april 2006.
- Swaen, Marco. Logika, inleiding mathematische logika ten behoeve van het hoger beroepsonderwijs. Amsterdam: Hogeschool van Amsterdam, 1993.
- Swaen, Marco. "Logisch denken of rekenen." Pythagoras 42.3 (2003): 8-13.
- Swaen, Marco. Telefonisch interview. 24 februari 2006.
- Swan, Malcolm. "Always, Sometimes or Never True." Mathematics Teaching 181 (2002): 32-33.

- Swart, Harrie de. "Wiskunde, Logica, Bewijzen en Argumenteren." Euclides 81.4 (2006): 206-09.
- Thijsse, Elias. Logica in de praktijk. Schoonhoven: Academic Service, 2000.
- Troyka, Lynn Quitman. Simon & Schuster. Handbook for Writers. Toronto: Pearson Education Canada Inc., 2002. 584-711.
- Tymoczko, Tom en Jim Henle. Sweet Reason. A Field Guide to Modern Logic. New York: W. H. Freeman and Company, 1995.
- Verbrugge L.C. Inleiding Logica A, Logica 2. Groningen: Faculteit der Wijsbegeerte Rijksuniversiteit Groningen, 2005.
- Verbrugge, Rineke. Persoonlijk interview. 3 april 2006.
- Vuijk, R.A.J., et al. Getal & Ruimte 3V1. Houten: Educatieve Partners Nederland, 2000. 58-63.
- Wason, P.C. "Reasoning about a rule." Quarterly Journal of Experimental Psychology. 20 (1968): 273-81.
- Wheatley, Jon. "Logic: Game or Tool?" The American Mathematical Monthly 67.09 (1960): 916-17.
- "Wiskunde Kangoeroe." Home page. Stichting Wiskunde Kangoeroe. 30 december 2005 <<http://www.math.ru.nl/kangoeroe/>>.

Bijlage A: Diagnostische toets = Eindtoets

A1: Export opgaven vanuit Brainbox

A2: Export feedback (beoordeling) vanuit Brainbox

A1: Export opgaven vanuit Brainbox

De vragen verschijnen één voor één op het scherm.

[CURSUSSEN](#) > [WISKUNDE A VOOR A4M \(GROEP BRH\)](#) > [CONFIGURATIESCHERM](#) > [D-TOETS](#) > VOORBEELD VAN BEOORDELING
DIAGNOSTISCHE TOETS LOGICA



Voorbeeld van beoordeling Diagnostische toets Logica

Naam:	Diagnostische toets Logica
Instructies:	Maak de onderstaande opgaven voor jezelf. Het is een diagnostische toets; je krijgt geen cijfer, maar het is voor ons belangrijk om te weten wat je kunt. Klik na elke vraag op het pijltje rechts onder om verder te gaan. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'. LET OP: Je kunt elke opgave maar één keer maken. Controleer dus je antwoord voordat je verder gaat! Je mag bij de opgaven kladpapier gebruiken. Je krijgt dit van de begeleidend docent. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is niet toegestaan. SUCCES!
Meerdere pogingen:	Niet toegestaan. Deze Toets kan slechts eenmaal worden gemaakt.
Voltooiing afdwingen:	Deze Toets moet nu worden voltooid. Deze kan niet later worden hervat.
Terugstappen niet toegestaan:	Voor deze Toets is terugstappen niet toegestaan. Wijzigingen in het antwoord na verzending zijn niet toegestaan.

▼ **Vraagvoltooiingsstatus:**

Vraag 1

0 punten

[Opslaan](#)

Lees voordat je aan de vragen begint de instructies in het grijze kader hierboven rustig door.
Vul hieronder in of je wiskunde A of B hebt.

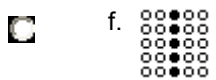
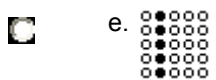
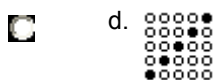
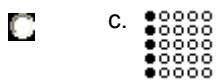
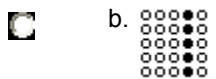
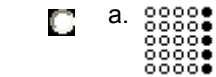
Als u naar de volgende vraag gaat, kunt u geen wijzigingen meer aanbrengen in dit antwoord. Vraag 1 van 11 |



Vraag 2**10 punten**[Opslaan](#)

Hieronder zie je drie plaatjes.

Geef aan welk plaatje logisch op de vierde plek hoort.

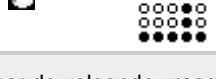
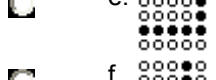
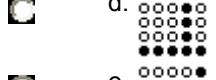
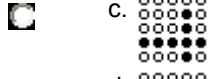
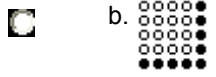
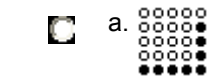


Als u naar de volgende vraag gaat, kunt u geen wijzigingen meer aanbrengen in dit antwoord. Vraag 2 van 11 |

Vraag 3**10 punten**[Opslaan](#)

Hieronder zie je drie plaatjes.

Geef aan welk plaatje logisch op de vierde plek hoort.



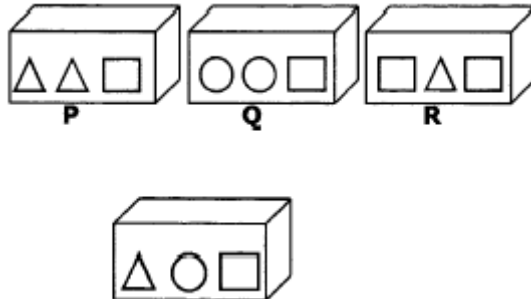
Als u naar de volgende vraag gaat, kunt u geen wijzigingen meer aanbrengen in dit antwoord. Vraag 3 van 11 |

Vraag 4

10 punten

Opslaan

Drie dozen P, Q en R met gewichten er in staan op volgorde van licht naar zwaar, P is de lichtste, R is de zwaarste. De doos daaronder moet in de rij gezet worden en nog steeds moeten de dozen van licht naar zwaar staan.



Welke van de volgende uitspraken over deze laatste doos is waar?

- ☐ A. De doos hoort vóór P.
- ☐ B. De doos hoort tussen P en Q.
- ☐ C. De doos hoort tussen Q en R.
- ☐ D. De doos hoort achter R.
- ☐ E. De doos is even zwaar als R.

Als u naar de volgende vraag gaat, kunt u geen wijzigingen meer aanbrengen in dit antwoord. Vraag 4 van 11 |

Vraag 5

10 punten

Opslaan

Alfred, Benjamin, Christine en Daniëlle hebben een cadeau voor hun vader gekocht. Een van de vier kinderen heeft het cadeau verstopt. Toen hun moeder vroeg wie dat had gedaan, antwoordden ze als volgt:

Alfred: "Ik was het niet."

Benjamin: "Ik was het niet."

Christine: "Daniëlle heeft het gedaan."

Daniëlle: "Benjamin heeft het gedaan."

Precies één van de kinderen heeft gelogen.
Wie heeft het cadeau verstopt?

- ☐ A. Alfred
- ☐ B. Benjamin
- ☐ C. Christine
- ☐ D. Daniëlle
- ☐ E. Dat kun je niet weten

Als u naar de volgende vraag gaat, kunt u geen wijzigingen meer aanbrengen in dit antwoord. Vraag 5 van 11 |

Vraag 6

10 punten

Opslaan

Hieronder zie je vier kaartjes. Elk kaartje heeft een letter op de ene kant en een getal op de andere kant.



Bij deze kaartjes hoort de volgende regel:

"Elke kaart met een D op de ene kant, heeft een 3 op de andere kant."

Aan jou de vraag: Welke van de bovenstaande kaartjes moet je zeker omdraaien om deze regel te controleren?

- ☐ D
- ☐ D en K
- ☐ D en 3
- ☐ D en 7
- ☐ D, K en 3
- ☐ D, K en 7
- ☐ D, 3 en 7
- ☐ K, 3 en 7
- ☐ D, K, 3 en 7

Als u naar de volgende vraag gaat, kunt u geen wijzigingen meer aanbrengen in dit antwoord. Vraag 6 van 11 | 

Vraag 7

10 punten

Opslaan

Lees het tekstje hieronder. Je krijgt hierover vijf vragen (a, b, c, d en e).
Deze tekst krijg je bij elke vraag opnieuw te zien.

John en Fred nemen allebei hetzelfde getallenpaar in gedachten: 3 en 11.

Beide zien ze het volgende:

* de **som** ($3 + 11$) is **even**

* het **product** (3×11) is **oneven**

John zegt: "Als de **som** van twee gehele getallen **even** is, is hun **product oneven**."

Fred zegt: "Als het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, is hun **som even**."

a) John en Fred zeggen allebei hetzelfde.



Waar



Onwaar

Als u naar de volgende vraag gaat, kunt u geen wijzigingen meer aanbrengen in dit antwoord. Vraag 7 van 11 | 

Vraag 8

10 punten

Opslaan

John en Fred nemen allebei hetzelfde getallenpaar in gedachten: 3 en 11.

Beide zien ze het volgende:

* de **som** ($3 + 11$) is **even**

* het **product** (3×11) is **oneven**

John zegt: "Als de **som** van twee gehele getallen **even** is, is hun **product oneven**."

Fred zegt: "Als het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, is hun **som even**."

b) Het **product** van twee gehele getallen is 1271.

Neem aan dat Fred gelijk heeft.

Welke van de drie onderstaande uitspraken moet dan ook waar zijn?



Je weet zeker dat de **som** van de twee getallen **even** is.



Je weet zeker dat de **som** van de twee getallen **oneven** is.



Je kunt niet weten of de **som even** of **oneven** is totdat je weet wat de twee getallen zijn.

Als u naar de volgende vraag gaat, kunt u geen wijzigingen meer aanbrengen in dit antwoord. Vraag 8 van 11 | 

Vraag 9**10 punten**

John en Fred nemen allebei hetzelfde getallenpaar in gedachten: 3 en 11.

Beide zien ze het volgende:

* de **som** ($3 + 11$) is **even**

* het **product** (3×11) is **oneven**

John zegt: "Als de **som** van twee gehele getallen **even** is, is hun **product oneven**."

Fred zegt: "Als het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, is hun **som even**."

c) Is de bewering van John waar? Verklaar je antwoord.

Normaal	▼	3	▼	Times New Roman	▼	B	<i>I</i>	II			

Als u naar de volgende vraag gaat, kunt u geen wijzigingen meer aanbrengen in dit antwoord. Vraag 9 van 11 |

Vraag 10**10 punten**

John en Fred nemen allebei hetzelfde getallenpaar in gedachten: 3 en 11.

Beide zien ze het volgende:

* de **som** ($3 + 11$) is **even**

* het **product** (3×11) is **oneven**

John zegt: "Als de **som** van twee gehele getallen **even** is, is hun **product oneven**."

Fred zegt: "Als het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, is hun **som even**."

d) Is de bewering van Fred waar? Verklaar je antwoord.

Normaal

3

Times New Roman

B

I

U

Als u naar de volgende vraag gaat, kunt u geen wijzigingen meer aanbrengen in dit antwoord.

Vraag 10 van 11

**Vraag 11****10 punten**[Opslaan](#)

John en Fred nemen allebei hetzelfde getallenpaar in gedachten: 3 en 11.

Beide zien ze het volgende:

* de **som** ($3 + 11$) is **even**

* het **product** (3×11) is **oneven**

John zegt: "Als de **som** van twee gehele getallen **even** is, is hun **product oneven**."

Fred zegt: "Als het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, is hun **som even**."

e) John en Fred zeggen allebei hetzelfde.



Waar



Onwaar

Klik op **Verzenden** om deze beoordeling te voltooien.

Vraag 11 van 11

A2: Export feedback (beoordeling) vanuit Brainbox



Beoordeling doornemen: Diagnostische toets Logica

Naam: Diagnostische toets Logica

Status: Needs Grading

Score: Cijfer is niet beschikbaar.

Instructies: Maak de onderstaande opgaven voor jezelf. Het is een diagnostische toets; je krijgt geen cijfer, maar het is voor ons belangrijk om te weten wat je kunt.
Klik na elke vraag op het pijltje rechts onder om verder te gaan. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.
LET OP: Je kunt elke opgave maar één keer maken. Controleer dus je antwoord voordat je verder gaat!

Je mag bij de opgaven kladpapier gebruiken. Je krijgt dit van de begeleidend docent.
Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is niet toegestaan.

SUCCES!

Vraag 1 0 van 0 punten

Lees voordat je aan de vragen begint de instructies in het grijze kader hierboven rustig door.
Vul hieronder in of je wiskunde A of B hebt.



Geselecteerd antwoord: ✓ [Geen gegeven]

Juist antwoord: ✓ A
✓ B

Feedback: Deze vraag is alleen bedoeld voor de verwerking van de resultaten.
Je krijgt hiervoor geen punten.

Vraag 2 0 van 10 punten

Hieronder zie je drie plaatjes.
Geef aan welk plaatje logisch op de vierde plek hoort.



Geselecteerd antwoord: ✗ [Geen gegeven]

Juist antwoord: ✓ b.

Feedback: De zwarte blokjes schuiven steeds één plek naar rechts. Het vierde plaatje moet dus b zijn.

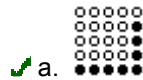
Vraag 3 0 van 10 punten

Hieronder zie je drie plaatjes.
Geef aan welk plaatje logisch op de vierde plek hoort.



Geselecteerd antwoord: ✗ [Geen gegeven]

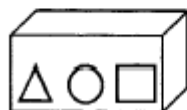
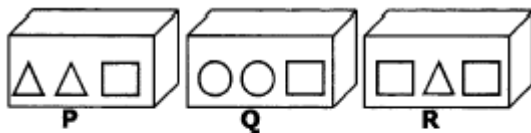
Juist antwoord:



Feedback: De horizontale zwarte blokjes schuiven steeds één plek naar beneden. De verticale blokjes springen steeds op en neer tussen boven en onder, maar schuiven tegelijkertijd ook één plek naar rechts.

Vraag 4 0 van 10 punten

Drie dozen P, Q en R met gewichten er in staan op volgorde van licht naar zwaar, P is de lichtste, R is de zwaarste. De doos daaronder moet in de rij gezet worden en nog steeds moeten de dozen van licht naar zwaar staan.



Welke van de volgende uitspraken over deze laatste doos is waar?

Geselecteerd antwoord: ✗ [Geen gegeven]

Juist antwoord: ✓ B. De doos hoort tussen P en Q.

Feedback: Een driehoek is lichter dan een cirkel (kijk naar P en Q) en een cirkel is lichter dan een vierkant (kijk naar Q en R). De doos hoort dus tussen P en Q.

Vraag 5 0 van 10 punten

Alfred, Benjamin, Christine en Daniëlle hebben een cadeau voor hun vader gekocht. Een van de vier kinderen heeft het cadeau verstopt. Toen hun moeder vroeg wie dat had gedaan, antwoordden ze als volgt:

Alfred: "Ik was het niet."

Benjamin: "Ik was het niet."

Christine: "Daniëlle heeft het gedaan."

Daniëlle: "Benjamin heeft het gedaan."



Precies één van de kinderen heeft gelogen.
Wie heeft het cadeau verstopt?

Geselecteerd antwoord: ✗ [Geen gegeven]

Juist antwoord: ✔ D. Daniëlle

Feedback: Als Alfred het heeft gedaan, dan liegen Alfred, Christine en Daniëlle. Als Benjamin het heeft gedaan, dan liegen Benjamin en Christine. Als Christine het heeft gedaan, dan liegen Christine en Daniëlle. Als Daniëlle het heeft gedaan, dan liegt alleen zichzelf. Antwoord D is dus het juiste antwoord.

Vraag 6 0 van 10 punten

Hieronder zie je vier kaartjes. Elk kaartje heeft een letter op de ene kant en een getal op de andere kant.



Bij deze kaartjes hoort de volgende regel:

"Elke kaart met een D op de ene kant, heeft een 3 op de andere kant."



Aan jou de vraag: Welke van de bovenstaande kaartjes moet je zeker omdraaien om deze regel te controleren?

Geselecteerd antwoord: ✗ [Geen gegeven]

Juist antwoord: ✔ D en 7

Feedback: Dat is niet goed. Je moet de kaart met de D en met de 7 omdraaien. Toelichting: Om te controleren of de regel klopt, moet je kijken of er achterop de kaart met de D inderdaad een 3 staat. De kaart met de K hoeft je niet om te draaien, want hier mag van alles op de achterkant staan. De kaart met de 3 hoeft je ook niet te controleren; de regel zegt alleen dat er op de achterkant van de kaarten met een D een 3 moet staan (één kant uit). Er wordt niets over kaarten met een 3 gezegd. De kaart met een 7 moet je wel controleren. Hier mag namelijk géén D op de achterkant staan, want dan zou de regel niet meer gelden.

Vraag 7 0 van 10 punten

Lees het tekstje hieronder. Je krijgt hierover vijf vragen (**a**, **b**, **c**, **d** en **e**).
Deze tekst krijg je bij elke vraag opnieuw te zien.

John en Fred nemen allebei hetzelfde getallenpaar in gedachten: 3 en 11.

Beide zien ze het volgende:

* de **som** ($3 + 11$) is **even**

* het **product** (3×11) is **oneven**



John zegt: "Als de **som** van twee gehele getallen **even** is, is hun **product oneven**."

Fred zegt: "Als het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, is hun **som even**."

a) John en Fred zeggen allebei hetzelfde.

Geselecteerd antwoord: ✗ [Geen gegeven]

Juist antwoord: ✓ Onwaar

Feedback: Dat is niet goed, beide beweringen zijn van de vorm ALS => DAN. Dat gaat één kant uit. Je kunt beweringen van deze vorm dus niet zonder meer omdraaien. Je zult in opgave **c** en **d** zien waarom dat hier niet kan.

Vraag 8 0 van 10 punten

John en Fred nemen allebei hetzelfde getallenpaar in gedachten: 3 en 11.

Beide zien ze het volgende:

* de **som** ($3 + 11$) is **even**

* het **product** (3×11) is **oneven**

John zegt: "Als de **som** van twee gehele getallen **even** is, is hun **product oneven**."

Fred zegt: "Als het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, is hun **som even**."



b) Het **product** van twee gehele getallen is 1271.

Neem aan dat Fred gelijk heeft.

Welke van de drie onderstaande uitspraken moet dan ook waar zijn?

Geselecteerd antwoord: ✗ [Geen gegeven]

Juist antwoord: ✓ Je weet zeker dat de **som** van de twee getallen **even** is.

Feedback: Er wordt aangenomen dat Fred gelijk heeft. Daar moet je dus vanuit gaan. Fred zegt dat ALS het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, DAN is hun **som even**. Hier is het **product** van twee gehele getallen **oneven** (1271). Als Fred gelijk heeft, moet de **som** van deze getallen wel **even** zijn. De eerste uitspraak is dus juist.

Vraag 9 **Cijfer nodig**

John en Fred nemen allebei hetzelfde getallenpaar in gedachten: 3 en 11.

Beide zien ze het volgende:

* de **som** ($3 + 11$) is **even**

* het **product** (3×11) is **oneven**

John zegt: "Als de **som** van twee gehele getallen **even** is, is hun **product oneven**."

Fred zegt: "Als het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, is hun **som even**."

c) Is de bewering van John waar? Verklaar je antwoord.



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: ✓

John beweert dat ALS de **som** van twee gehele getallen **even** is, DAN is hun **product oneven**. Deze bewering is onjuist. Je kunt dat aantonen door een zogenaamd tegenvoorbeeld te geven. Als je getallen kunt vinden waarvoor de bewering van John niet klopt, is de bewering dus onwaar.

Kies bijvoorbeeld de getallen 2 en 4. Hun **som** ($2 + 4$) is 6 en **even**. Hun **product** (2×4) is echter ook **even**. John beweert echter dat hun **product oneven** moest zijn.

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 10 **Cijfer nodig**

John en Fred nemen allebei hetzelfde getallenpaar in gedachten: 3 en 11.

Beide zien ze het volgende:

* de **som** ($3 + 11$) is **even**

* het **product** (3×11) is **oneven**

John zegt: "Als de **som** van twee gehele getallen **even** is, is hun **product oneven**."

Fred zegt: "Als het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, is hun **som even**."



d) Is de bewering van Fred waar? Verklaar je antwoord.

Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: ✓

Fred heeft gelijk. Je kunt hier echter niet volstaan met een voorbeeld, want misschien is er iemand anders die wel een tegenvoorbeeld kan vinden. Fred zegt dat **ALS** het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, **DAN** is hun **som even**. Een **product** kan alleen **oneven** zijn als je twee oneven getallen met elkaar vermenigvuldigt. De **som** van twee oneven getallen is altijd **even**. Dus wat Fred zegt is juist.

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 11 **0 van 10 punten**

John en Fred nemen allebei hetzelfde getallenpaar in gedachten: 3 en 11.

Beide zien ze het volgende:

* de **som** ($3 + 11$) is **even**

* het **product** (3×11) is **oneven**

John zegt: "Als de **som** van twee gehele getallen **even** is, is hun **product oneven**."

Fred zegt: "Als het **product** van twee gehele getallen **oneven** is, is hun **som even**."



e) John en Fred zeggen allebei hetzelfde.

Geselecteerd antwoord: ✗[Geen gegeven]

Juist antwoord: ✓Onwaar

Feedback: John en Fred zeggen niet allebei hetzelfde:
In opgave **c** heb je gezien dat John ongelijk heeft en
in opgave **d** heb je gezien dat Fred gelijk heeft.

Bijlage B: Studiewijzer / planning leerlingen A4M

Studiewijzer / planning Atheneum 4 Wiskunde A, periode D

Rölingcollege, locatie Belcampo

Schooljaar 2005/2006

Studiewijzer Atheneum 4 Wiskunde A, periode D**2005/2006****Periode D:**

- Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica (= handelingsdeel)
- Analyse_4A: Veranderingen (boek A1(B1) deel 2)
Voorkennis: A-hoofdstukken boek A1(B1) deel 1 en deel 2.
- Differentiëren: Analyse_4B: § 4_4 / § 4_5 (boek A1(B1) deel 2)

Lessen:

Voor het vak wiskunde heb je deze periode 2 contacturen van BRH per week.

DI	3:	lokaal 34
WOE	2:	lokaal 34

Werklessen Wiskunde:

Op onderstaande momenten zijn er docenten wiskunde beschikbaar in het studiehuis tweede fase:

	DI 2: BRN en TOB			
MA 3: LDH	DI 3: BRN	WOE 3: ERO en <i>BRH</i>		VRIJ 3: BRN en LDH
				VRIJ 4: BRN

Toetsing:

- Schriftelijke toets van 120 minuten over Analyse_4A. Deze toets is *niet* herkansbaar. Let op: Deze toets wordt afgenomen op donderdag 15 juni. Tijdens de toetsweek heb je geen toets voor wiskunde.
- De lessenserie Logica is een handelingsdeel. De toelichting bij dit handelingsdeel staat hieronder.

Handelingsdeel Wiskunde & Filosofie:

De lessenserie Logica bestaat uit acht lessen. Het handelingsdeel wordt voldoende afgesloten als voldaan is aan de volgende punten:

- actieve deelname aan de lessen
(bij ongeoorloofde afwezigheid volgt een vervangende opdracht)
- op tijd inleveren van de vier huiswerkopdrachten via Brainbox
- de huiswerkopdrachten zijn van voldoende kwaliteit (er is serieus aan gewerkt)
- afsluitende Brainbox-toets met voldoende resultaat

Bestanden:

Alle plannings, practicum-bestanden, e.d. kun je terugvinden op de L-schijf van het Belcampo-netwerk in de volgende map:
L:\WISKUNDE\0506 BRH Atheneum 4

Planning:

In het schema vind je de inhoud per les. Tijdens de les is er meestal voldoende tijd om aan de opgegeven opdrachten te beginnen. De rest is huiswerk.

SUCCES!

Planning Atheneum 4 Wiskunde A, periode D**2005/2006***Huiswerkopdrachten lever je in via Brainbox.*

Datum	Inhoud	Huiswerk
di 11 april	Les 1: Introductie + beweringen	Huiswerk 1 Deadline: donderdag 13 april 12:00uur
di 18 april	Les 2: Redeneren en bewijzen	
woe 19 april	Les 3: Vervolg redeneren en bewijzen	Huiswerk 2 Deadline: maandag 24 april 12:00uur
di 25 april	Les 4: Als...dan...-beweringen	
woe 26 april	Les 5: Nog meer als...dan...-beweringen	Huiswerk 3 Deadline: maandag 8 mei 12:00uur
Meivakantie		
di 9 mei	Les 6: Formules in de Propositielogica	
woe 10 mei	Les 7: Waarheidstabellen	Huiswerk 4 Deadline: maandag 15 mei 12:00uur
di 16 mei	Les 8: Tot slot	
woe 17 mei	Afsluitende toets over lessenserie Logica.	
	Meenemen	Opgaven
	A1(B1) deel 2	ICT: I_1, I_2, I_3, I_4 (blz. 108/109)*
di 23 mei	A1(B1) deel 2	ICT: I_6, I_7, I_8, I_9, I_10 (blz. 109-111)* K: I_5
woe 24 mei	A1(B1) deel 2	ICT: I_11, I_12, I_13, I_14, I_15 (blz. 111)*
di 30 mei	A1(B1) deel 2	ICT: Afronding ICT-opgaven* § 4_1: 4, 5 (blz. 93) § 4_2: 10 (blz. 95)
woe 31 mei	A1(B1) deel 2	§ 4_5: 22, 24, 25, 26, 27 (blz. 100/101)
woe 7 juni	A1(B1) deel 2	§ 4_6: 28, 29, 30, 31, 32 (blz. 102/103)
di 13 juni	A1(B1) deel 2 + Helpdesk	Extra oefening bij Analyse_4A: Nabespreken: 32 1, 2, 3, 4 (blz. 15 Helpdesk)
woe 14 juni	A1(B1) deel 2 + Helpdesk	Herhaling: naar keuze Testbeeld (blz. 106/107) of Oefentoets bij Analyse_3 en 4A (blz. 18/19 Helpdesk).
do 15 juni	TOETS over Analyse_4A -> 3^e + 4^e lesuur (duur: 120 min.)	
di 20 juni	A1(B1) deel 2	Differentiëren (wiskunde A2: vervolg in klas 5) § 4_5: 27, 28, 30, 31 (blz. 122/123) K: 20, 24, 25
woe 21 juni	A1(B1) deel 2	Differentiëren + Afsluiting
Toetsweek	geen toets voor wiskunde	

* ben je tijdens de ICT-les afwezig, dan kun je in het studiehuis of met de cd-rom uit de helpdesk dit practicum inhalen.

Bijlage C: Lespakket

C1: Lesmateriaal

C2: Export huiswerkopdrachten vanuit Brainbox

C3: Docentenhandleiding

C1: Lesmateriaal

Wiskunde & Filosofie:

Logica



1.



"ZIE JE DIE JONGEMAN DAAR AAN DE OVERKANT? DAT IS EEN TERRORIST."

2.



"GROTE HEMEL, PA, WAAK ZIE JE DAT IN VREDESNAAM AAN?"

3.

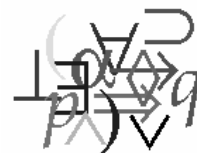


"DAT KUN JE NIET ZIEN, DAT IS JUIST HET VERRADERLYKE!"

4.

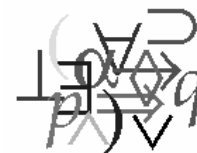


Samenstelling/docent: Hugo Bronkhorst
Schooljaar 2005/2006
Atheneum 4-M



Inhoudsopgave

Inhoudsopgave.....	2
Inleiding	3
<i>Filosofie in Atheneum 4.....</i>	3
<i>Logica.....</i>	4
Les 1: Introductie + beweringen	5
<i>Beweringen.....</i>	8
Huiswerk 1.....	10
Les 2: Redeneren en bewijzen.....	11
<i>Tegenvoorbeeld.....</i>	13
Les 3: Vervolg redeneren en bewijzen	16
<i>Kaartjes.....</i>	20
Huiswerk 2.....	21
Les 4: Als...dan...-beweringen.....	22
<i>De wijze adviseurs</i>	22
<i>Als-dan</i>	24
Les 5: Nog meer als...dan...-beweringen.....	29
<i>Equivalentie</i>	33
Huiswerk 3.....	36
Les 6: Formules in de Propositielogica	37
Les 7: Waarheidstabellen	41
Huiswerk 4.....	49
Les 8: Tot slot	51
Extra opgaven.....	54
Lijst met afbeeldingen	57
Referenties	59



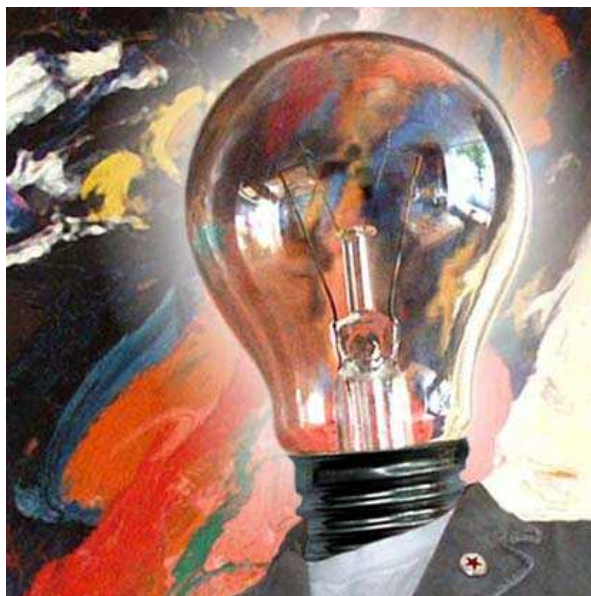
Inleiding

Wiskunde & Filosofie? Deze combinatie zal waarschijnlijk niet als eerste bij je opkomen. Toch zijn er genoeg raakvlakken. Zowel bij Wiskunde als bij Filosofie zijn kritisch nadenken en een goede redenering belangrijk. Door gebruik te maken van goede argumenten kun je een uitspraak onderbouwen. Naast (wiskundige) uitspraken die we gaan bewijzen of weerleggen, zal in deze lessenserie naar de Propositielogica worden toegewerkt. Met de waarheidstabellen uit de Propositielogica kunnen we moeilijke vraagstukken met een aantal rekenregels snel oplossen. De daarin gebruikte notatie zal je waarschijnlijk eerder aan Wiskunde dan aan Filosofie doen denken.

Deze lessenserie Wiskunde & Filosofie bestaat uit acht lessen, vier huiswerkopdrachten en een afsluitende toets. De huiswerkopdrachten en de toets maak je in Brainbox. De lessenserie telt als handelingsdeel. De voorwaarden voor dit handelingsdeel kun je in de studiewijzer terugvinden.

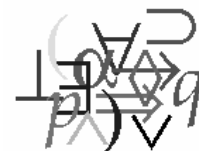
Filosofie in Atheneum 4

Dit schooljaar ben je begonnen met een introductiecursus Filosofie in periode A en B. Na een kort historisch overzicht, beginnend bij de oude Grieken, stond vooral ethiek centraal. De cursus werd afgerond met een onderzoeksopdracht, waarbij je een werkstuk als eindproduct inleverde. In dat werkstuk moest je een standpunt of mening verdedigen met goede redenen of argumenten om te voorkomen dat jouw standpunt of mening gemakkelijk in twijfel kon worden genomen. In de lessenserie Wiskunde & Filosofie zullen we uitspraken wat verder onder de loep gaan nemen.



In periode C kreeg Filosofie een vervolg bij CKV1. Je hebt daarbij vooral gekeken naar kunst, smaken en oordelen (esthetica). CKV1 & Filosofie is daarbij gekoppeld aan je culturele activiteiten. Het nadenken over je eigen smaak bij de gekozen activiteiten komt daarbij terug in je eindverslag.

In periode D is Filosofie dus gekoppeld aan Wiskunde waarbij Logica centraal zal staan.



Logica

Logica is traditioneel de wetenschap van het redeneren en begint bij de oude Grieken. De Griekse filosoof Aristoteles ($\pm$ 384-322 v. Chr.) wordt beschouwd als de grondlegger van de Logica. Hij ontwikkelde een theorie van syllogismen. Syllogismen zijn redeneervormen. Er zijn 256 mogelijke syllogismen. Aristoteles dacht dat er hiervan 19 geldig waren. Later bleken dat er slechts 17 te zijn. Het bekendste syllogisme van Aristoteles is:

Alle mensen zijn sterfelijk,

Socrates is een mens,

Dus Socrates is sterfelijk.

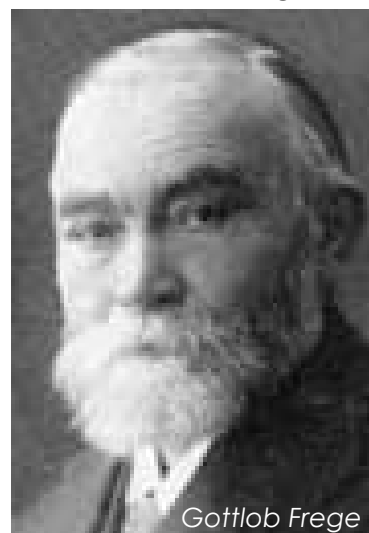
De volgende redenering gaat echter fout. Geef voordat je verder leest antwoord op de volgende vraag: 'Wat zou je kiezen: eeuwig geluk of een broodje kaas?' De meeste mensen zullen eeuwig geluk kiezen, dus dan geldt:

Niets is beter dan eeuwig geluk,

Een broodje kaas is beter dan niets,

Dus een broodje kaas is beter dan eeuwig geluk.

De Logica van de Grieken was niet volledig. Toch is er 2000 jaar niets mee gebeurd. Pas in de negentiende eeuw kwam de Duitse wiskundige, logicus en filosoof Gottlob Frege (1848-1925) met de Moderne Logica, die bestaat uit de 'Propositielogica' en de 'Predikatenlogica'. De Propositielogica gaat over uitspraken, waarvan we er in deze lessenserie verschillende gaan bekijken. De Predikatenlogica gaat over eigenschappen.

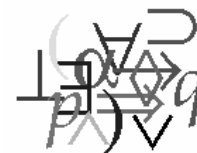


Gottlob Frege



Alan Turing

Sindsdien heeft de Logica een inhaalslag gemaakt. Tot op de dag van vandaag houden onder andere wiskundigen en filosofen zich bezig met Logica. Maar ook in de Informatica komt Logica terug. De Engelsman Alan Turing (1912-1954) is de stamvader van de Informatica. Hij ontwikkelde de zogenaamde Turing machine, die een basis bood voor het ontcijferen van Duitse geheime boodschappen tijdens de Tweede Wereldoorlog. Ook wordt er in de Informatica gebruik gemaakt van Logische Schakelingen.



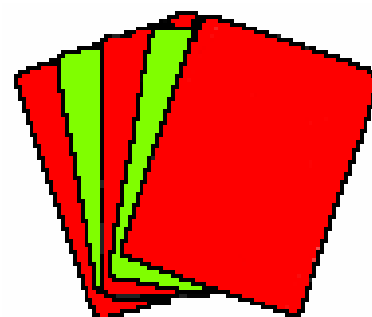
Les 1: Introductie + beweringen

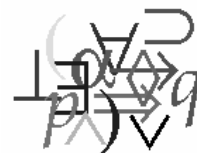
We beginnen deze lessenserie met het redeneren in een kaartspel dat groene en rode kaarten bevat. Je krijgt steeds één kaart in een rijtje van vijf te zien. We bekijken de kaartjes van links naar rechts. Aan jou de taak om de kleur van de andere kaarten te voorspellen! De regel die daarbij hoort:

*‘Als een kaart in het rijtje rood is,
dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.’*

De spelregels:

- 1) Het spel speel je in tweetallen. De tweetallen worden door de docent samengesteld.
- 2) Verdeel de rollen voor de eerste ronde: ‘voorspeller’ en ‘toezichthouder’.
- 3) De docent schudt de kaarten en hangt vijf willekeurige kaarten volgens bovenstaande regel met de zwarte zijde naar voren aan het bord.
- 4) De docent vraagt de voorspellers welke kaart ze graag willen zien. De meeste stemmen gelden!
- 5) De voorspeller vult nu op het werkblad (zie volgende pagina) achter ‘het gegeven rijtje’ de kaart in die is omgedraaid. Maak hierbij gebruik van kleurpotloden of de letters ‘R’ voor rood en ‘G’ voor groen.
- 6) De voorspeller probeert nu de rij ‘jouw voorspelling’ zo goed mogelijk in te vullen waarbij hij bovenstaande regel in gedachten houdt.
- 7) Hierna geeft de voorspeller het werkblad aan de toezichthouder. De toezichthouder vult de rij ‘het gegeven rijtje’ verder in nadat de docent alle kaarten heeft omgedraaid. Vervolgens vult hij de rij ‘score’ als volgt in: + voor een goede voorspelling, – voor een onjuiste voorspelling en X als er geen voorspelling is gedaan.
- 8) De toezichthouder bepaalt het totaal aan plusjes, kruisjes en minnetjes en zet deze in de tabel ‘score ronde’.
- 9) Wissel de rollen: ‘voorspeller’ wordt ‘toezichthouder’ en ‘toezichthouder’ wordt ‘voorspeller’.
- 10) Herhaal stap 3 t/m 9 totdat er vijf rondes geweest zijn.
- 11) De toezichthouder zet het totaal aan plusjes, kruisjes en minnetjes van de vijf rondes in de tabel ‘totale score’.
- 12) De winnaar is het team met de meeste plusjes. Bij gelijkstand wint van hen het team met de minste minnetjes.
Het winnende team krijgt natuurlijk een leuk prijsje van de docent.





Werkblad bij het kaartspel:

*'Als een kaart in het rijtje rood is,
dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'*

Ronde 1	het gegeven rijtje					
	jouw voorspelling					
	score					

Score ronde 1

+	X	-

Ronde 2	het gegeven rijtje					
	jouw voorspelling					
	score					

Score ronde 2

+	X	-

Ronde 3	het gegeven rijtje					
	jouw voorspelling					
	score					

Score ronde 3

+	X	-

Ronde 4	het gegeven rijtje					
	jouw voorspelling					
	score					

Score ronde 4

+	X	-

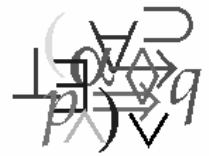
Ronde 5	het gegeven rijtje					
	jouw voorspelling					
	score					

Score ronde 5

+	X	-

Totale score

+	X	-



 Opdracht 1:

Probeer met je medespeler onderstaande vragen zo goed mogelijk te beantwoorden.

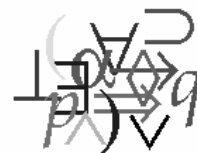
- a)** Hoeveel juiste voorspellingen kun je in elk spel maken bij een rijtje van vijf kaarten? Geef een duidelijke toelichting.

Hint: Wat zijn de mogelijkheden als je de eerste kaart te zien krijgt? Als de eerste kaart rood is, dan weet je dus..., maar als de eerste kaart groen is, dan... Hoe zit dat bij het zien van de tweede kaart? Enzovoorts.

- b)** Welke van de vijf kaarten wil jij het liefst omgedraaid zien?
En welke invloed heeft de omgedraaide kaart op jouw voorspelling?

- c)** Bespreek je antwoorden met een ander team.
Beschrijf hieronder de verschillen.

De komende lessen zullen we nog regelmatig terugkijken naar deze kaartjes. Daarvoor moet we echter eerst wat meer weten van de **als...dan...**-beweringen. En wat is een bewering eigenlijk?



Beweringen

In het spel met de rode en groene kaartjes werkte je met de volgende regel: "Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood." Van de vijf kaarten kreeg je er eentje te zien. Met redeneren probeerde je de rest zo goed mogelijk in te vullen. Redeneren doe je eigenlijk elke dag. Een paar voorbeelden:

- als ik hard fiets, dan kan ik het groene verkeerslicht halen
- als ik dit handelingsdeel niet doe, (dan) mag ik geen examen doen

Opdracht 2:

Verzin zelf nog twee van dit soort **als...dan...**-redeneringen.

Voordat we gaan redeneren in de wiskunde, moeten we weten wat een bewering is. De bewering 'Wortels van gehele getallen zijn nooit kleiner dan 0' is een ware bewering. Maar de bewering '8 is kleiner dan 7' is onwaar. Een bewering is dus een uitspraak die waar of onwaar is. Een bewering waarvan we nog niet weten of zij waar is, noemen we een vermoeden of hypothese.

Opdracht 3:

Geef aan of de volgende uitspraken beweringen zijn.

Zo ja, geef aan of ze waar of onwaar zijn.

a) Amsterdam is de hoofdstad van Noord-Holland.

b) Hoe gaat het?

c) Een vierkant heeft vier gelijke zijden.

d) $4 + 2$

e) $4 + 2 = 8$

f) een dag en 3 uur

vervolg op pagina 9

Bewering:

Zo ja:

Ja / Nee

Waar / Onwaar

Ja / Nee

Waar / Onwaar

Ja / Nee

Waar / Onwaar

Ja / Nee

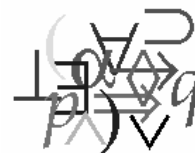
Waar / Onwaar

Ja / Nee

Waar / Onwaar

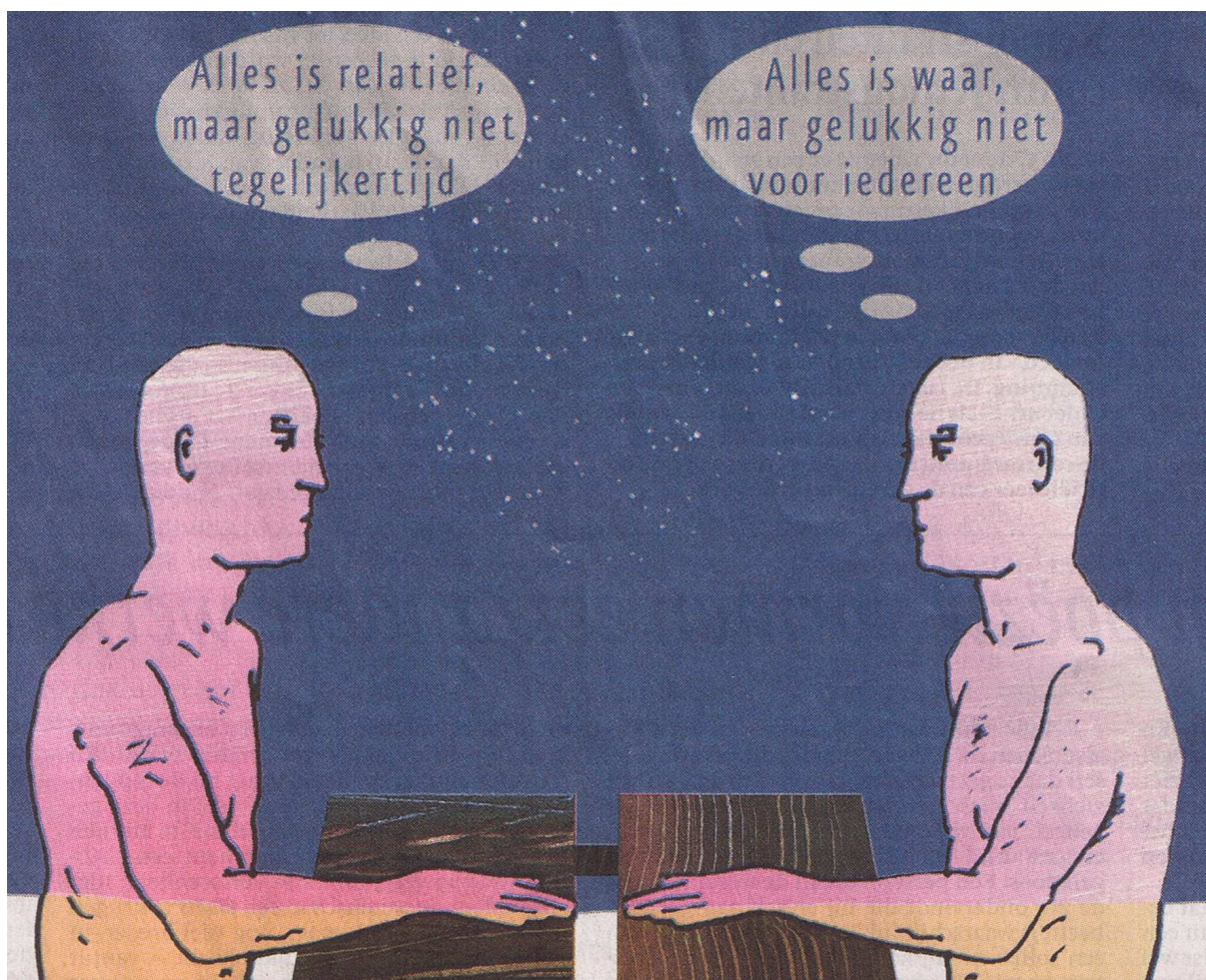
Ja / Nee

Waar / Onwaar

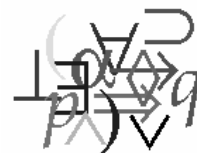


	Bewering:	Zo ja:
g) Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180° .	Ja / Nee	Waar / Onwaar
h) Kim zit 's ochtends op school of spijbelt.	Ja / Nee	Waar / Onwaar
i) Ik vind haar run.	Ja / Nee	Waar / Onwaar
j) Stijntje is op zaterdag en op zondag geboren.	Ja / Nee	Waar / Onwaar

Ook in de wiskunde redeneer je regelmatig om tot een goede oplossing te komen. In les 2 zullen we wiskundige beweringen gaan onderzoeken.



Tekening: Geert Setola

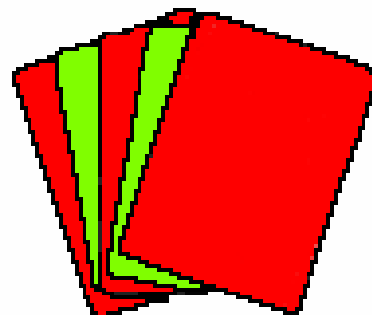


Huiswerk 1

Huiswerk 1 bestaat uit de volgende twee opdrachten:

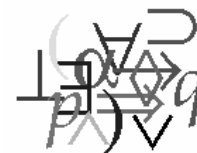
- **Huiswerk 1a: Kaartjes**

In Brainbox staan twaalf rijtjes van vijf kaarten. Elke kaart is rood (**R**) of groen (**G**) gekleurd. We bekijken de kaartjes van links naar rechts. Aan jou de taak om na te gaan of elk rijtje aan de gegeven regel *'Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'* voldoet.



- **Huiswerk 1b: Beweringen**

In deze Brainboxopdracht worden opdracht 2 en 3, die je hierboven gemaakt hebt, gecombineerd. Nadat je jouw redeneringen uit opdracht 2 hebt overgenomen, wordt gevraagd of jouw redeneringen ook beweringen zijn. Daar hoort natuurlijk een verklaring bij. Verder krijg je wat gegevens waarvan je een ware bewering moet maken. En in de laatste vraag mag je je creativiteit laten zien door met de meest originele bewering te komen.



Les 2: Redeneren en bewijzen

In de vorige les hebben we al een aantal beweringen bekeken. Om te onderzoeken of een wiskundige bewering waar is, kun je niets anders doen dan redeneren. Door enige redeneringen achter elkaar te houden kun je zo'n bewering vaak bewijzen. Een eigenschap of bewering die je kunt bewijzen heet een stelling.

Laten we eens naar een stelling gaan kijken:
'In een vierhoek is de som van de hoeken 360° .'

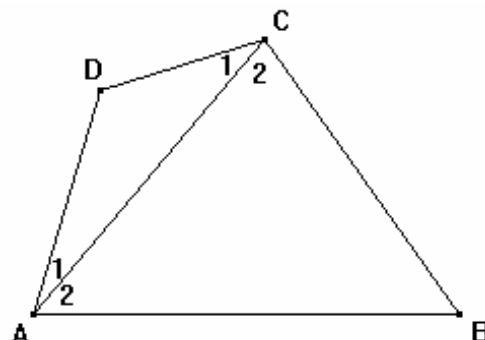
Deze stelling kunnen we herschrijven tot een als...dan...-bewering:
'Als ik een vierhoek heb, dan is de som van de hoeken 360° .'

We gaan dit voor elke vierhoek bewijzen. Je kunt dan dus géén vierhoek vinden waarvan de som van de hoeken geen 360° is.

Bewijs:

Teken een willekeurige vierhoek ABCD (zie figuur hiernaast). Als ik een vierhoek heb, dan kan hem altijd in twee driehoeken verdelen. Daarom tekenen we ook de diagonaal AC.

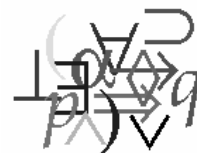
De vierhoek is nu verdeeld in twee driehoeken: $\triangle ACD$ en $\triangle ABC$. We weten al dat de som van de hoeken in een driehoek gelijk is aan 180° (weet je nog waarom?).



$$\begin{array}{l} \text{Dus: In } \triangle ACD \text{ is } \angle A_1 + \angle C_1 + \angle D = 180^\circ \\ \text{In } \triangle ABC \text{ is } \angle A_2 + \angle C_2 + \angle B = 180^\circ \\ \hline \angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 + \angle D + \angle B = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ \\ \text{Dus: } \angle A + \angle C + \angle D + \angle B = 360^\circ \end{array}$$

Q.E.D.

Q.E.D. is de afkorting van het Latijnse "quod erat demonstrandum". Letterlijk vertaald: "dat wat bewezen moest worden". Van oudsher is het gebruikelijk een bewijs met deze afkorting af te sluiten. De gewoonte om wiskundige beweringen te bewijzen is ontstaan bij de Grieken ruim 600 jaar voor Christus. In de eerste eeuw voor Christus schreef Euclides in dertien boeken een samenvatting van een flink deel van de wiskundige kennis die de Grieken hadden opgebouwd. Zijn werk heet 'de Elementen'. Iedere stelling wordt daarin bewezen. Ruim tweeduizend jaar zijn de Elementen als leerboeken gebruikt. Maar ook nu nog maken wij gebruik van die kennis.



 Opdracht 4:

Bewering: 'Een vijfhoek kan ik in drie driehoeken verdelen.'

a) Herschrijf deze bewering naar een als...dan...-bewering.

b) Laat zien dat deze bewering juist is.
Teken hiervoor een willekeurige vijfhoek $PQRST$.



c) Vul in:
Stelling: 'De som van de hoeken in een vijfhoek is gelijk aan _____°.'

d) Probeer het bewijs van de stelling uit opgave **c** netjes uit te schrijven.

Tegenvoorbeeld

In de bewijzen op pagina 11 en 12 kozen we voor een *willekeurige* vierhoek en voor een *willekeurige* vijfhoek. Dat woordje 'willekeurig' is belangrijk. Had je bij het bewijs over de hoekensom in een vierhoek voor een vierkant gekozen, dan weet je nog niet of de bewering ook waar is voor bijvoorbeeld een rechthoek, parallellogram of vlieger. Door een willekeurige vierhoek te kiezen geef je een bewijs voor *alle* vierhoeken. De bewering is dus waar voor *elke* vierhoek.

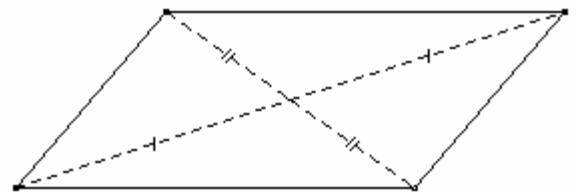
Soms lukt het echter niet om een vermoeden te bewijzen. Misschien is het vermoeden wel onjuist. Dan kun je op zoek gaan naar een tegenvoorbeeld. Eén tegenvoorbeeld is voldoende, want dan heb je aangetoond dat het vermoeden inderdaad niet juist is.



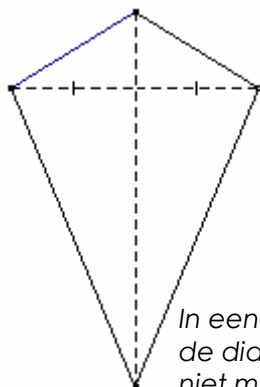
Laten we eens naar een vermoeden gaan kijken:

'In elke vierhoek snijden de diagonalen elkaar middendoor.'

Dit lijkt een mooie ware bewering. De bewering is juist voor een vierkant, een rechthoek, een parallellogram en een ruit. Juiste voorbeelden zijn echter nog geen bewijs. Willen we het vermoeden bewijzen, dan moet de bewering voor elke willekeurige vierhoek waar zijn. Een bewijs kunnen we niet geven, want het vermoeden is onjuist. De bewering is namelijk niet waar voor een vlieger.

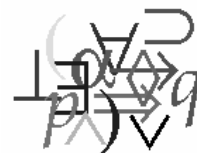


In een parallellogram snijden de diagonalen elkaar middendoor.



In een vlieger snijden de diagonalen elkaar niet middendoor.

Met één tegenvoorbeeld hebben we nu het vermoeden ontkracht. De bewering 'in elke vierhoek snijden de diagonalen elkaar middendoor' is dus onwaar.



 Opdracht 5:

Bewering: 'Elke vierhoek heeft minstens één rechte hoek.'

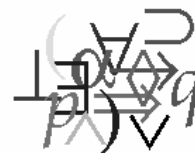
a) Herschrijf deze bewering naar een als...dan...-bewering.

b) Voor welke vierhoeken is deze bewering juist?

c) De bewering is echter onjuist. Geef minstens drie tegenvoorbeelden.
Een tekening kan daarbij helpen.

 Opdracht 6:

Bewering: 'In een vierhoek is elke hoek altijd kleiner dan 180° .'
Geef een tegenvoorbeeld bij deze bewering.



We hebben nu een aantal meetkundige beweringen bekeken. Maar ook op andere gebieden van de wiskunde kun je vermoedens bewijzen of ontkrachten met een tegenvoorbeeld. In de volgende opgave ga je een vermoeden uit de getaltheorie onderzoeken.

 Opdracht 7:

Vermoeden:

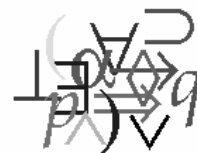
'De wortel uit een geheel getal is altijd kleiner dan het getal zelf.'

Bijvoorbeeld: $\sqrt{4} = 2$ en $2 < 4$ of $\sqrt{25} = 5$ en $5 < 25$.

a) Lever een bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

b) Hoe zit het met hogere machtswortels ($\sqrt[3]{}$ of $\sqrt[4]{}$)?





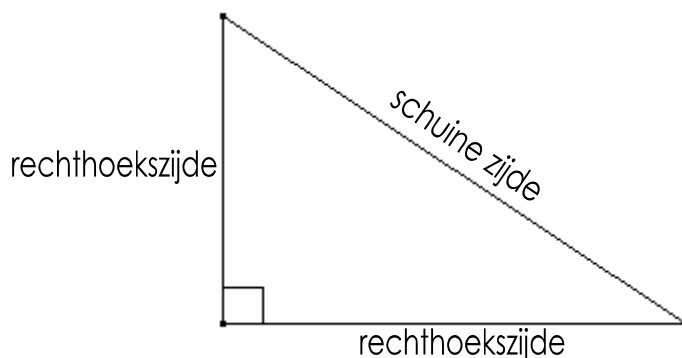
Les 3: Vervolg redeneren en bewijzen

Vraag je vader, moeder, een goede kennis of iemand op straat naar wiskunde en het eerste wat bij hem of haar zal opkomen is $a^2 + b^2 = c^2$. Dat is waarschijnlijk de bekendste stelling in de wiskunde: de stelling van Pythagoras. In woorden kun je de stelling van Pythagoras als volgt weergeven: 'In elke rechthoekige driehoek is (ene rechthoekszijde)² + (andere rechthoekszijde)² = (schuine zijde)².'

Hier kun je ook een als...dan...bewering van maken: 'Als ik een rechthoekige driehoek heb, dan geldt (ene rechthoekszijde)² + (andere rechthoekszijde)² = (schuine zijde)².'

De rechthoekszijden zijn de zijden bij de rechte hoek. De schuine zijde ligt tegenover de rechte hoek en is de langste zijde van de driehoek.

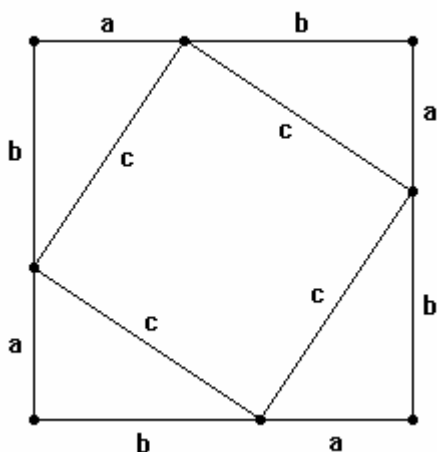
In klas 2 heb je met hokjes tellen aangetoond dat de stelling waar moest zijn, maar kunnen we ook een net bewijs geven?



Opdracht 8:

Bewering: 'Als ik een rechthoekige driehoek heb, dan geldt (ene rechthoekszijde)² + (andere rechthoekszijde)² = (schuine zijde)².'

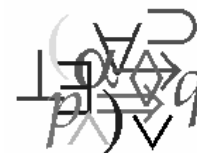
Om dit te bewijzen nemen we vier gelijke rechthoekige driehoeken, die met hun schuine zijden een vierkant insluiten:



a) Laten we voordat we het algemene geval gaan bewijzen eerst eens naar een getallenvoorbeeld kijken. Neem $a = 3$ cm en $b = 4$ cm. Bereken c .

zijde	kwadraat
$a = 3$	
$b = 4$	
$c =$	

+
Dus $c =$ ____ cm.



b) We kunnen nu de oppervlakte van het grote vierkant en van het ingesloten vierkant bepalen. Vul in:

Het grote vierkant heeft zijden van $\underline{\hspace{1cm}}$ + $\underline{\hspace{1cm}}$ = $\underline{\hspace{1cm}}$ cm.

De oppervlakte van het grote vierkant is dan: _____ cm^2 .

Het ingesloten vierkant heeft zijden van ____ cm (zie **a**).

De oppervlakte van het ingesloten vierkant is dan: _____ cm^2 .

De oppervlakte van het grote vierkant moet dus gelijk zijn aan de oppervlakte van het ingesloten vierkant + de oppervlakte van de vier driehoeken.

De oppervlakte van één driehoek is $\frac{1}{2} \cdot \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^2$.

De oppervlakte van de vier driehoeken is dan: _____ cm^2 .

Dus: opp. grote vierkant = opp. ingesloten vierkant + opp. 4 driehoeken

Dus: $\underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^2.$

Klopt!

c) In dit getallenvoorbeeld hebben we bij **a** al de stelling van Pythagoras gebruikt terwijl we die stelling juist willen bewijzen. Laten we daarom de stappen van **b** nu eens met letters uitschrijven.

Het grote vierkant heeft zijden van lengte ____ + ____.

De oppervlakte van het grote vierkant is dan:

$$(\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})^2 = (\underline{\hspace{1cm}}) \cdot (\underline{\hspace{1cm}}) = \underline{\hspace{1cm}}.$$

Het ingesloten vierkant heeft zijden van lengte ____.

De oppervlakte van het ingesloten vierkant is dan: _____.

De oppervlakte van het grote vierkant moet dus gelijk zijn aan de oppervlakte van het ingesloten vierkant + de oppervlakte van de vier driehoeken.

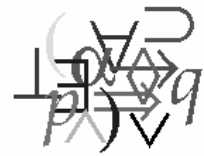
De oppervlakte van één driehoek is $\frac{1}{2} \cdot \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$.

De oppervlakte van de vier driehoeken is dan: _____.

Dus: opp. grote vierkant = opp. ingesloten vierkant + opp. 4 driehoeken

Dus: _____.

Oftewel: _____ (de stelling van Pythagoras!) Q.E.D.



d) Beschrijf in je eigen woorden waarom het gegeven bewijs in opgave **c** juist is. Hoe weet je bijvoorbeeld dat het ingesloten vierkant met zijden van lengte c een vierkant is?



Standbeeld Pythagoras op
het Griekse eiland Samos

In opdracht 8 heb je de stelling van Pythagoras bewezen. Waarschijnlijk heeft Pythagoras zelf een ander bewijs gegeven. Pythagoras ($\pm$ 580-496 v. Chr.) werd op het Griekse eiland Samos geboren. Hij heeft veel gereisd en maakte daardoor kennis met wiskundige methoden die de Egyptenaren en Babyloniërs (inwoners van het huidige Irak en omgeving) gebruikten. In Zuid-Italië stichtte hij een school waar men Wiskunde, Sterrenkunde, Muziektheorie, maar vooral Filosofie bestudeerde. Pythagoras probeerde alles met behulp van getallen te weten te komen: 'alles is getal.' Aan hem wordt dan ook de ontdekking van de getalsverhoudingen in muziek toegeschreven.

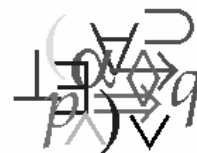
In de wiskunde is Pythagoras dus vooral bekend vanwege de stelling van Pythagoras. De stelling was echter niet nieuw. Zij werd al vele eeuwen gebruikt, maar was nog nooit bewezen. Pythagoras bracht daar verandering in. De mythe gaat dat hij na het vinden van zijn bewijs honderd ossen aan de goden offerde. Jouw bewijs uit opdracht 8 en het bewijs van Pythagoras zijn

niet de enige bewijzen. Zo hebben bijvoorbeeld Leonardo da Vinci (1452-1519) en de Amerikaanse president James Abram Garfield (1831-1881) de stelling ook bewezen. In 1914 had de Nederlander Jan Versluys (1845-1920) 96 verschillende bewijzen in een boekje verzameld. De Amerikaan Elisha Scott Loomis (1852-1940) wist er echter nog meer te verzamelen en kwam in 1927 met meer dan 250 bewijzen.

In het huiswerk ga je nog wat verder met bewijzen in de vlakke meetkunde. In les 4 zullen we ook nog een door wiskundigen veel gebruikte bewijsmethode bekijken: bewijzen met behulp van inductie. Inductie komt uit het Latijn en is een wijze van redeneren waarbij je van het bijzondere naar het algemene gaat.



Koninkrijk Babylonië



Kaartjes

We gaan terug naar de kaartjes uit les 1. Bij de kaartjes hoorde de volgende regel:

*'Als een kaart in het rijtje rood is,
dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'*

Bij je voorspellingen met het kaartspel en in opdracht 1 kwam je er achter dat je de regel alleen van links naar rechts kunt lezen. Blader nog even terug: Wat weet je over de andere kaarten als een bepaalde kaart rood (**R**) is? En hoe zit het met een groene (**G**) kaart?

Opdracht 9:

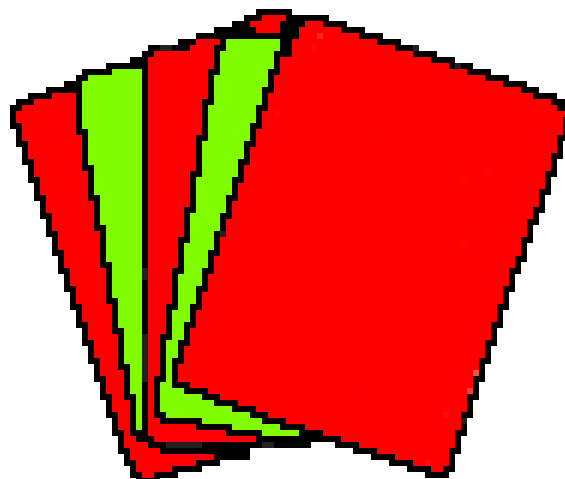
Hieronder staan vier rijtjes van vijf kaarten. Bij elk rijtje is één kaart gegeven. Een kaart is rood (**R**) of groen (**G**) gekleurd. Probeer de rijtjes zo compleet mogelijk te maken. Zet een **R** op de kaart als een kaart rood moet zijn, zet een **G** op de kaart als de kaart groen moet zijn en zet een **X** op de kaart als je niet kunt weten of de kaart rood of groen moet zijn. Gebruik daarbij bovenstaande regel.

a) ☐ ☐ **R** ☐ ☐ ☐ ;

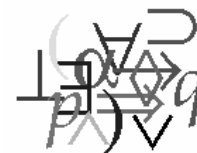
b) ☐ ☐ ☐ **R** ☐ ☐ ;

c) ☐ ☐ ☐ **G** ☐ ☐ ;

d) ☐ ☐ ☐ ☐ **G** ☐.



Met behulp van opdracht 9 kunnen we nu de volgende conclusies trekken: Als er een rode kaart gegeven is, zijn de kaarten daarna ook rood. Maar je kunt niets zeggen over de kaart ervoor, die kan zowel rood als groen zijn. Laat staan dat je iets kunt zeggen over de andere kaarten daarvoor. Bij een groene gaat dat net andersom. Als een bepaalde kaart groen is, dan moeten alle kaarten daarvoor ook groen zijn. Maar je kunt niets zeggen over de kaart daarna, die kan zowel rood als groen zijn. Laat staan dat je iets kunt zeggen over de andere kaarten daarna.



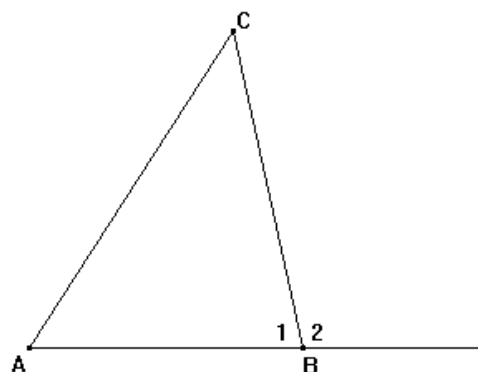
Huiswerk 2

Huiswerk 2 bestaat uit de volgende twee opdrachten:

- **Huiswerk 2a: Bewijzen**

In deze Brainboxopdracht word je gevraagd een bewijsje af te maken. Daarbij moet je weten wat een buitenhoek is: in de figuur hiernaast is $\angle B_2$ de buitenhoek van hoek B in driehoek ABC.

Daarnaast word je gevraagd zelf een meetkundige bewering te verzinnen en deze te bewijzen als zij waar is of een tegenvoorbeeld te geven als zij onwaar is.



- **Huiswerk 2b: Kaartjes**

In Brainbox staan twaalf rijtjes van vijf kaarten. Bij elk rijtje zijn vier kaarten gegeven. Een vijfde kaart ligt nog omgekeerd. Je weet niet of die kaart rood (**R**) of groen (**G**) gekleurd is. We bekijken de rijtjes van links naar rechts. Aan jou de taak om na te gaan of elk rijtje aan de gegeven regel 'Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.' voldoet.

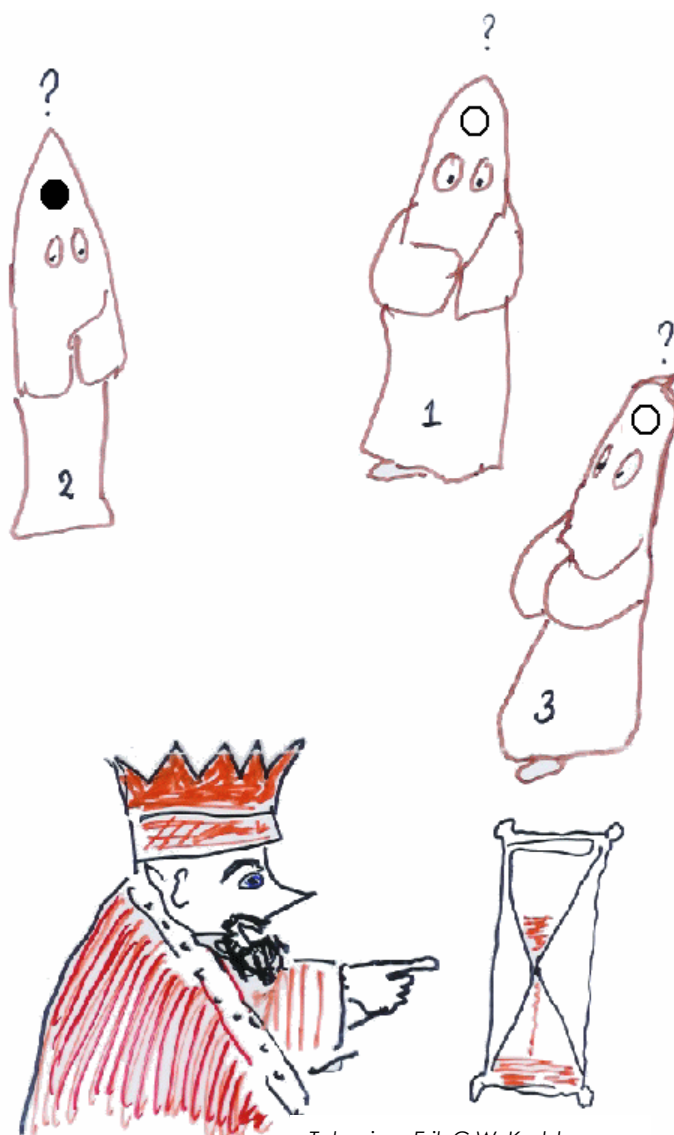
Les 4: Als...dan...-beweringen

In de afgelopen lessen heb je al verschillende als...dan...-redeneringen en als...dan...-beweringen gezien. In deze les gaan we daar eens wat beter naar kijken: hoe gebruiken we als-dan in het Nederlands? En hoe schrijven we als-dan in de wiskunde?

De wijze adviseurs

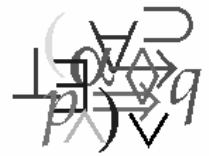
Lang geleden in een land hier ver vandaan was er een koning die de wijsheid van zijn adviseurs wilde testen. Hij deed dat op de volgende manier: hij blinddoekte alle adviseurs en schilderde een witte of een zwarte stip op hun voorhoofd en verstopte de verfspullen. Vervolgens liet hij ze de blinddoeken afdoen en stelde hij hen zodanig in een kring op dat iedereen, op zijn of haar eigen stip na, alle stippen kon zien. Toen ging de koning midden in de kring staan en zei:

"Ik heb bij ieder van jullie een witte of een zwarte stip op het voorhoofd geschilderd. Ten minste één van de stippen is zwart. Wie een zwarte stip heeft, dient zo snel mogelijk naar voren te stappen."



Tekening: Erik C.W. Krabbe

Nu was het algemeen bekend onder de adviseurs dat ieder van hen perfect logisch kon redeneren en dat ieder van hen zodanig eerzuchtig was, dat hij/zij zo snel mogelijk naar voren zou stappen om zijn/haar kennis ten toon te spreiden. Maar de adviseurs keken wel uit om voortijdig te gokken, want de koning kon zeer slecht tegen een ongemotiveerd antwoord.



● Klassenopdracht:

We weten nog niet hoe de adviseurs er achter zijn gekomen wie een zwarte stip heeft. Daarom verplaatsen we ons terug in de tijd. Jullie zijn de adviseurs en de docent zal de koning spelen.

De adviseurs gaan zodadelijk in een kring staan en doen allen hun ogen dicht. Je krijgt dan van de docent een sticker, die wit of zwart gekleurd is. Daarna zal de docent, die de koning speelt, jullie de cruciale vraag stellen wie een zwarte stip heeft (ten minste één). Daarbij mag je wel weer kijken, maar er mag natuurlijk niet gepraat worden.

Succes!

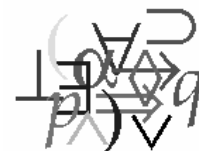
✎ Opdracht 10:

a) Beschrijf in je eigen woorden waarom de adviseur met een zwarte stip in de **eerste ronde** wist dat hij/zij een zwarte stip had.

b) Een adviseur met een zwarte stip wist in de **tweede ronde** dat er ____ of ____ adviseurs met een zwarte stip waren. Kun je dat verklaren?

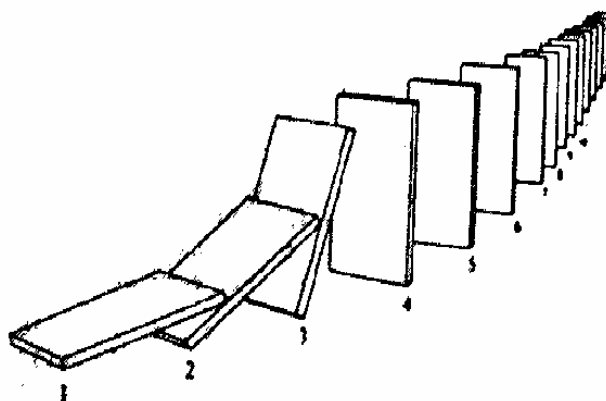
c) Beschrijf de redenering van een adviseurs met een witte stip in de **tweede ronde**.

In het huiswerk wordt gevraagd de situatie te beschrijven als drie adviseurs een zwarte stip hebben.



Bij de wijze adviseurs hebben we gewerkt met gevalonderscheiding. We begonnen met het eenvoudigste geval, namelijk één adviseur met een zwarte stip. Daarna keken we naar twee adviseurs met een zwarte stip. In het huiswerk kijk je naar drie adviseurs met een zwarte stip. Zo kun je doorgaan met vier, vijf, zes, ... , n adviseurs met een zwarte stip. Waarbij je dus oneindig veel situaties hebt. Het is onmogelijk om die situaties allemaal op te schrijven. Toch is deze manier van redeneren bruikbaar. Je begint met een bijzonder geval (één adviseur met een zwarte stip) en je wilt naar het algemene geval (n adviseurs met een zwarte stip). Dat noemen we redeneren met behulp van inductie.

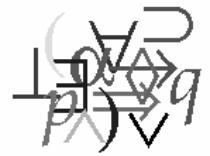
In de wiskunde wordt bij veel bewijzen van dit systeem gebruik gemaakt. We noemen dat dan een bewijs met behulp van volledige inductie. In het bewijs wordt dan aangetoond dat de bewering waar is voor het eenvoudigste geval (bijzonder). Daarna neem je aan dat de bewering ook waar is voor het n -de geval en laat je zien dat de bewering klopt voor het $(n+1)$ -de geval (algemeen). Je kunt dit vergelijken met het vallen van dominostenen. De eerste steen valt (bijzonder). Als een steen valt, dan valt ook de steen daarachter. Dus: alle stenen vallen (algemeen).



Als-dan

De adviseurs gebruikten een aantal als...dan...-redeneringen voordat zij de juiste conclusie konden trekken. Ook veel beweringen hebben de vorm als...dan.... In het Nederlands willen de woorden als en/of dan nog wel eens verdwijnen terwijl ze wel bedoeld zijn. Dit komt omdat de woordvolgorde in het Nederlands niet strikt is vastgelegd.

In het Engels en het Frans gebruikt men de woorden als en dan een stuk preciezer. Het woordje **als** is in die talen altijd terug te vinden: **if** resp. **si**. **Dan** – **then** resp. **alors** – is ook vaak terug te vinden in als...dan...-redeneringen of -beweringen, maar wordt ook wel weggelaten. Daarnaast hebben het onderwerp en de persoonsvorm een vrijwel vaste volgorde.



Laten we de volgende bewering nogmaals bekijken:

- **als** ik hard fiets, **dan** kan ik het groene verkeerslicht halen

Zonder de betekenis van deze bewering te veranderen, kunnen we ook schrijven:

- **als** ik hard fiets, kan ik het groene verkeerslicht halen
- fiets ik hard, **dan** kan ik het groene verkeerslicht halen
- ik kan het groene verkeerslicht halen **als** ik hard fiets
- **zodra** ik hard fiets, kan ik het groene verkeerslicht halen
- door hard te fietsen, kan ik het groene verkeerslicht halen

In spreektaal gebruiken we ook wel eens **wanneer** in plaats van **als**:

- **wanneer** ik hard fiets, kan ik het groene verkeerslicht halen

Het woordje **als** gaat echter uit van een veronderstelling: als dat het geval zou zijn. De betekenis van **wanneer** is net wat sterker. We zullen in deze lessen wanneer dus niet gebruiken.

De woorden **als** en **dan** worden hier gebruikt in redeneringen en beweringen. Als en dan hebben daarin een geheel andere betekenis dan in bijvoorbeeld: 'Peter is even groot als Harm, maar Peter is groter dan André.'

Opdracht 11:

Blader nog eens terug naar jouw **als...dan...**-redeneringen uit opdracht 2 (pagina 8). Herschrijf deze redenering naar een vorm waarbij je **niet** met **als** begint.

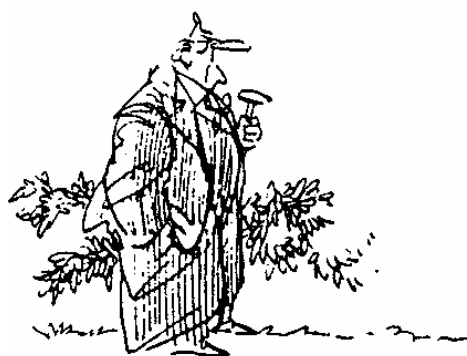
In de wiskunde wordt als-dan vaak geschreven met een pijl:

- ik fiets hard $\Rightarrow$ ik kan het groene verkeerslicht halen

Een uitspraak in deze vorm noemen we een implicatie. De pijl wordt de implicatiepijl genoemd. Deze pijl zal straks bij de waarheidstabellen voor een korte notatie zorgen.

Opdracht 12:

Lees de onderstaande strip, die ook op de voorkant staat.

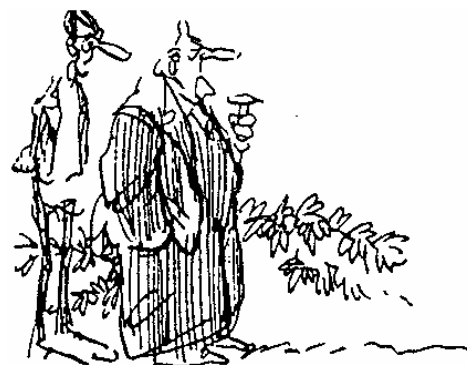


1.



"ZIE JE DIE JONGEMAN DAAR AAN DE OVERKANT? DAT IS EEN TERRORIST."

2.



"GROTE HEMEL, PA, WAAR ZIE JE DAT IN VREDESNAAM AAN?"

3.



"DAT KUN JE NIET ZIEN DAT IS JUIST HET VERKRAADERLYKE!"

4.

De vader doet een nogal beschuldigende uitspraak. Zijn uitspraak kun je omzetten in een als...dan...-bewering.

a) Herschrijf de uitspraak van vader naar een als...dan...-bewering.

b) Kun je die uitspraak omdraaien?
Verklaar je antwoord.

Omdraaien betekent:

als -uitspraak 1-, dan -uitspraak 2-
wordt

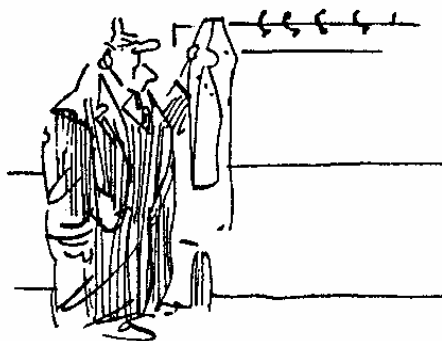
als -uitspraak 2-, dan -uitspraak 1-

 Opdracht 13:

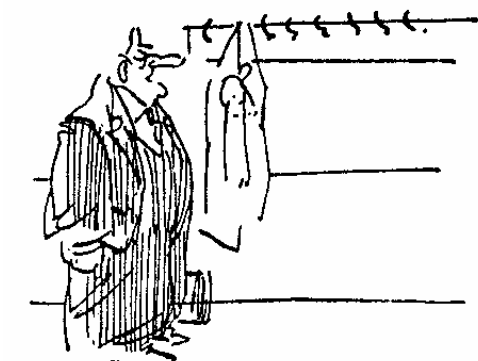
Lees de onderstaande strip.



1.

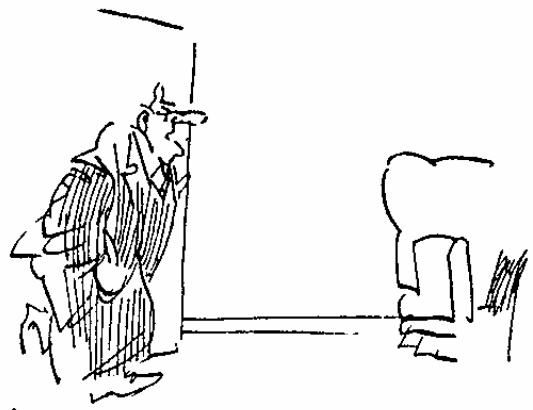


2.



"GEEN ANTWOORD
DAN IS HANS DUS THUIS"

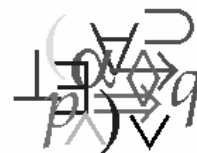
3.



"... DIE HEEFT ER ZON HEKEL AAN
ALS IK 'HOE-OE, IK BEN THUIS'
ROEP, DAT-IE NOOIT ANTWOORDT."

a) Herschrijf de uitspraak van vader naar een als...dan...-bewering.

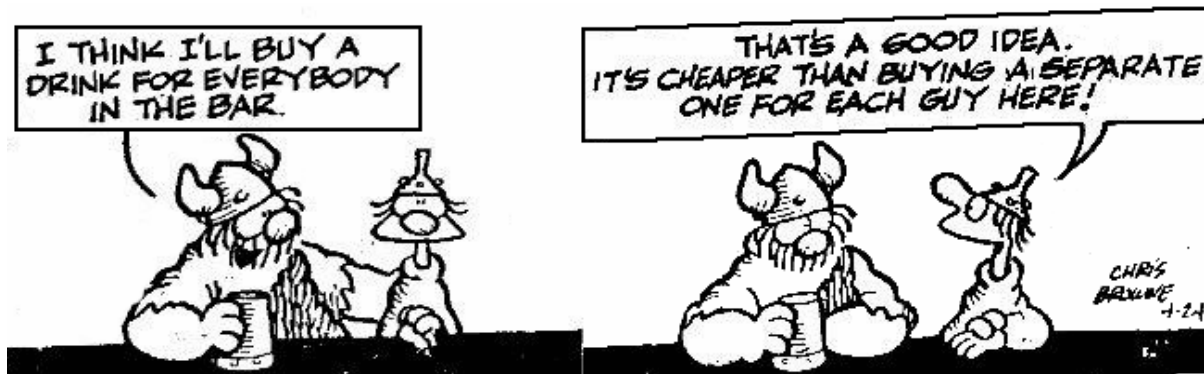
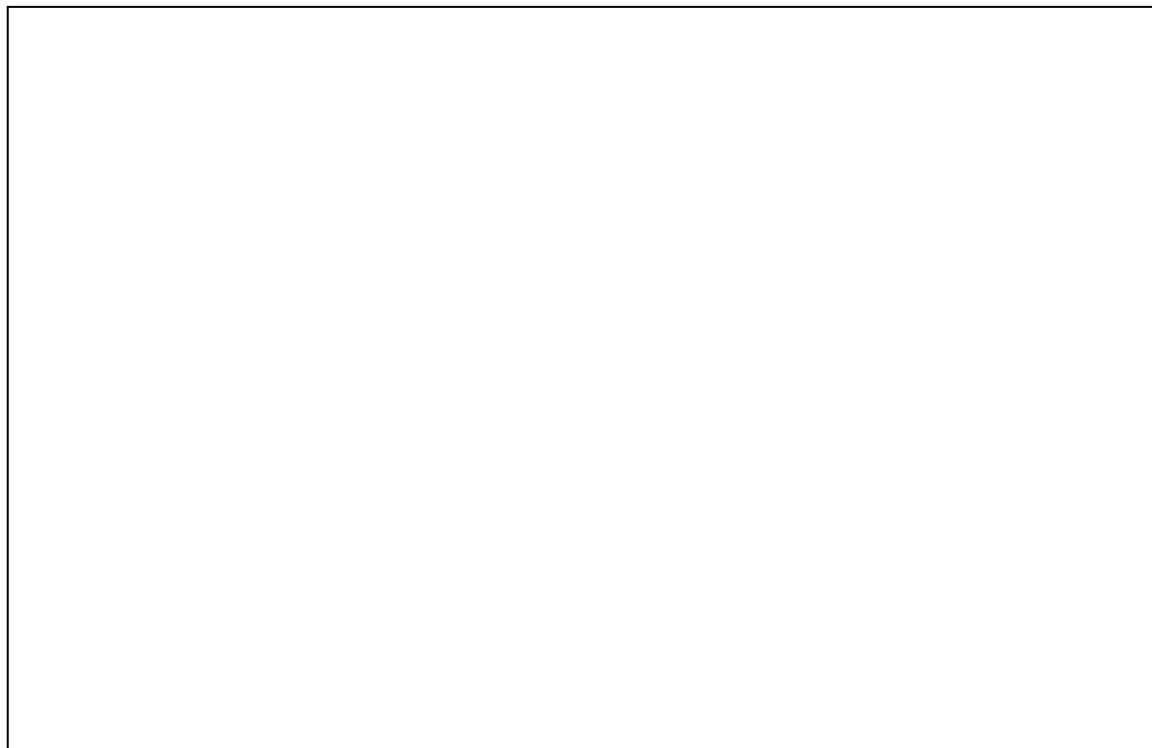
b) Wat is er mis met zijn redenering? Geef een duidelijke toelichting.



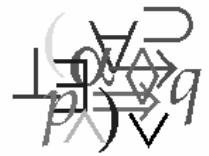
In opdracht 12 en 13 heb je gezien dat je moet oppassen met als...dan...-beweringen. Je kunt ze niet zomaar omdraaien. In opdracht 12 was vader duidelijk bevooroordeeld en was zijn argument een drogreden. In opdracht 13 trekt vader wel een erg voorbarige conclusie. De redenering staat als het ware op haar kop. In les 5 zullen we wat conclusies over als...dan...-redeneringen gaan opschrijven.

Opdracht 14:

Maak zelf een strip waarin een redenering op haar kop staat.



Tekening: Chris Browne



Les 5: Nog meer als...dan...-beweringen

Wanneer is een als...dan...-bewering waar? En wat maakt een als...dan...-bewering onwaar? Om dat te onderzoeken gaan we terug naar de regel bij de kaartjes:

*‘Als een kaart in het rijtje rood is,
dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.’*

Opdracht 15:

- a) Leg uit waarom deze regel over gaat in een ware bewering voor de rijtjes:

R R R R R en G G G G G.

- b) Noem R een kaart is rood, en G een kaart is groen.
Verder betekent ... R het ernaast gelegen kaartje is rood, en
... G het ernaast gelegen kaartje is groen.
Hiermee herschrijven we de regel met de implicatiepijl tot: R $\Rightarrow$... R.

Vul de volgende zinnen aan:

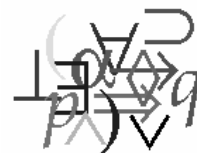
1) Een kaart in het rijtje is rood, de volgende kaart is dan _____.
We noemen dat modus ponens (bevestigende modus). Je gebruikt gewoon: R $\Rightarrow$... R.

2) Een kaart in het rijtje is groen, de vorige kaart is dan _____.
We noemen dat modus tollens (ontkennende modus). Je zegt dan eigenlijk de volgende kaart is niet rood, dus de vorige ook niet. Je leest de regel ontkennend van rechts naar links. Kort opgeschreven: niet-R $\Leftarrow$ niet-... R, oftewel:

G $\Leftarrow$... G, oftewel: ... G $\Rightarrow$ G.

3) Een kaart in het rijtje is groen, de volgende kaart is dan _____ of _____. Kort opgeschreven: G $\Rightarrow$ (... R of ... G).

4) Een kaart in het rijtje is rood, de vorige kaart is dan rood of groen.
Kort opgeschreven: _____.



In opdracht 15 hebben we alleen ware beweringen bij de gegeven regel bekeken. Een rijtje waarin een groene kaart op een rode kaart volgt, voldoet niet aan de regel. Kort opgeschreven: $\boxed{R} \Rightarrow \dots \boxed{G}$ is onwaar.

Hetzelfde kunnen we doen met de meetkundige redeneringen en beweringen uit les 2 en 3. Laten we nogmaals kijken naar de volgende twee beweringen:

- 'Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180° .'
- 'In elke vierhoek snijden de diagonalen elkaar middendoor.'

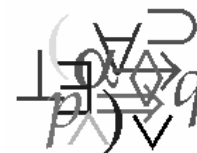
Opdracht 16:

a) Laat zien dat je de bewering 'Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180° .' niet zomaar om kan draaien.

b) Je kunt deze bewering wel ontkennend omdraaien (modus tollens). Schrijf die bewering in de als...dan...-vorm op.

c) Is de bewering 'Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180° .' waar voor een ruit? Geef een duidelijke toelichting.

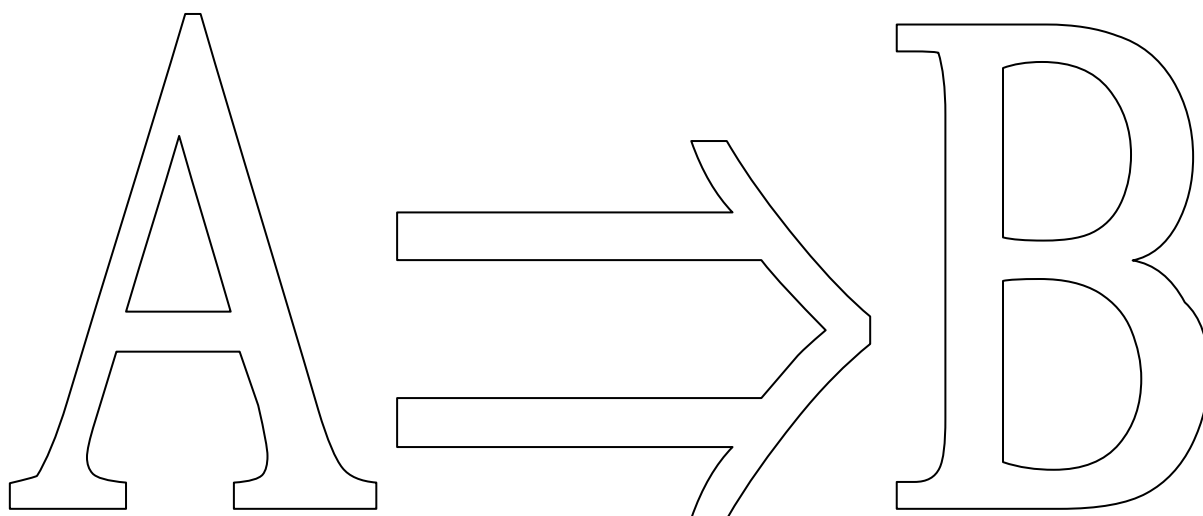
De tweede bewering 'In elke vierhoek snijden de diagonalen elkaar middendoor.' was in het algemeen onwaar, maar kon waar gemaakt worden door een vierkant of een rechthoek te kiezen.



In opdracht 15 heb je een als...dan...-bewering al verkort met de implicatiepijl. Laten we nu eens naar de algemene vorm kijken:

als A, dan B

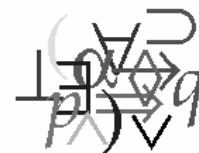
A en B zijn uitspraken die je vrij mag invullen.



 Opdracht 17:

Geef intuïtief aan of de volgende beweringen waar of onwaar zijn. Ga daarbij uit van de bovenstaande vorm: **als A, dan B**.

- | | |
|--|---------------|
| a) A, dus: B | Waar / Onwaar |
| b) B, dus: A | Waar / Onwaar |
| c) niet-A, dus: niet-B | Waar / Onwaar |
| d) niet-B, dus: niet-A | Waar / Onwaar |
| e) A, dus: niet-B | Waar / Onwaar |
| f) niet-A, dus: B | Waar / Onwaar |
| g) niet-A, dus: $A \Rightarrow B$ is waar | Waar / Onwaar |



 Opdracht 18:

Vul dit schema nogmaals in als je voor A en B de volgende uitspraken neemt:

A: het sneeuwt

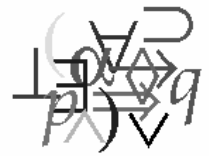
B: Sandra komt niet naar school

Dus: **als** het sneeuwt, (**dan**) komt Sandra niet naar school.

- a)** A, dus: B Waar / Onwaar
het sneeuwt, dus: Sandra komt niet naar school
- b)** B, dus: A Waar / Onwaar
Sandra komt niet naar school, dus: het sneeuwt
- c)** niet-A, dus: niet-B Waar / Onwaar
niet-(het sneeuwt), dus: niet-(Sandra komt niet naar school)
het sneeuwt niet, dus: Sandra komt (wel) naar school
- d)** niet-B, dus: niet-A Waar / Onwaar
Sandra komt (wel) naar school, dus: het sneeuwt niet
- e)** A, dus: niet-B Waar / Onwaar
het sneeuwt, dus: Sandra komt (wel) naar school
- f)** niet-A, dus: B Waar / Onwaar
het sneeuwt niet, dus: Sandra komt niet naar school
- g)** niet-A, dus: $A \Rightarrow B$ is waar Waar / Onwaar
het sneeuwt niet, dus:
'als het sneeuwt, (dan) komt Sandra niet naar school' is waar
- h)** Vergelijk je antwoorden met opdracht 17. Probeer eventuele verschillen te verklaren.



- i)** Bespreek de verschillen met een klasgenoot.



Uit een als...dan...-bewering kun je dus alleen een juiste conclusie trekken als A en B beide waar zijn (modus ponens), of als B niet waar is en A dus ook niet (modus tollens). Bij modus ponens lees je de bewering netjes van links naar rechts. Bij modus tollens lees je de bewering ontkennend van rechts naar links.

De als...dan...-bewering zelf is in veel gevallen waar. Zij is vanzelfsprekend waar als A en B waar zijn. Daarnaast kan zij nooit waar zijn als A wel waar is, maar B niet. Maar de als...dan...-bewering is ook waar als A niet waar is. Het maakt dan namelijk niet uit welke conclusie je trekt, want de als...dan...-bewering zegt niets over niet-A.

'Als het sneeuwt, (dan) komt Sandra niet naar school.' is dus alleen onwaar als Sandra naar school komt terwijl het sneeuwt. Als het niet sneeuwt, weet je niet of Sandra wel of niet naar school komt. De gehele als...dan...-bewering is dan dus waar.

Ga dit laatste zelf na bij de volgende twee voorbeelden:

- 'Als je dit medicijn neemt, (dan) word je beter!'
- 'Als je op het schoolfeest een biertje wilt bestellen, (dan) moet je minimaal 16 jaar zijn.'

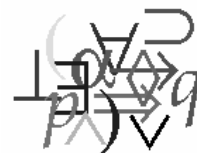


Equivalentie

Naast de gewone als...dan...-beweringen ($A \Rightarrow B$) heb je ook nog *juist dan als*. We spreken dan van een dubbele implicatie of equivalentie. Er moet dan gelden: $A \Rightarrow B$, maar ook: $B \Rightarrow A$. Je kunt dat korter opschrijven met de dubbele implicatiepijl: $A \Leftrightarrow B$. Deze pijl ga je bij de waarheidstabellen gebruiken.

Laten we de bovenstaande voorbeelden eens omdraaien:

- 'Als je beter wordt, (dan) neem je dit medicijn!' oftewel:
'Als je beter wilt worden, (dan) neem je dit medicijn!'
Dat is natuurlijk onzin! Wie zegt dat je alleen beter wordt als je dat specifieke medicijn neemt? Deze bewering is dus **niet** equivalent.
- 'Als je minimaal 16 jaar bent, (dan) mag je op het schoolfeest een biertje bestellen'
Deze bewering is wel waar, dus equivalent.



 Opdracht 19:

Bekijk de volgende wiskundige bewering:

'Als $x < 5$, dan x is even.'
oftewel: ' $x < 5 \Rightarrow x$ is even'

a) Voor welke positieve gehele getallen x is deze bewering waar?

b) Wanneer is deze bewering onwaar?

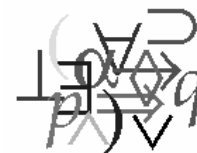
c) Is de als...dan...-bewering dus waar of onwaar? Verklaar je antwoord.

d) Wat gaat er hier mis met modus tollens?

 Opdracht 20:

Blader nog eens door de lessen. Zijn we al equivalente beweringen tegen gekomen? Misschien heb je ze zelf wel opgeschreven.

Geef hieronder aan welke als...dan...-beweringen equivalent zijn. Geef een duidelijke toelichting.



Opdracht 21: Uit de school geklapt!

Los de onderstaande puzzel op.

Zes leraren vergaderden in de personeelskamer aan een lange rechthoekige tafel over de bevordering van enkele leerlingen uit klas A4M. Kun je aan de hand van de onderstaande aanwijzingen in de tekening aangeven wie waar zat en welk vak hij of zij geeft?

Met 'leraar' kan zowel een man als een vrouw bedoeld worden. Verder zijn de combinaties niet op waarheid gebaseerd.

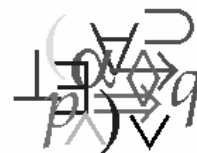
Aanwijzingen:

- 1) Mevrouw Rohof geeft geen Aardrijkskunde.
- 2) Niemand zat tegenover een leraar van dezelfde sekse.
- 3) Aan elke lange zijde van de tafel zit een man en een vrouw.
- 4) Degene die Wiskunde geeft, zat niet aan een van de korte zijden van de tafel.
- 5) Mevrouw Holwerda zat aan dezelfde zijde als degene die Filosofie geeft, terwijl de heer Boetje, die tegenover de leraar Geschiedenis zat, zich aan dezelfde zijde bevond als degene die Engels onderwijst.
- 6) De heer Wijkstra, die geen Wiskunde geeft, zat aan de raamzijde.
- 7) De Aardrijkskundeleraar had mevrouw Zwaal als buurvrouw ter linkerzijde. Ze zaten niet aan dezelfde zijde van de tafel.
- 8) De leraar die nog niet is genoemd, is de heer Hegeman. Het nog niet genoemde vak is Maatschappijleer.

RAAM

Om over na te denken:

Welk verband bestaat er tussen deze puzzel en als...dan...-redeneringen?



Huiswerk 3

Huiswerk 3 bestaat uit de volgende twee opdrachten:

- **Huiswerk 3a: De wijze adviseurs**

In de klassenopdracht en in opdracht 10 aan het begin van les 4 heb je gekeken naar de wijze adviseurs. Je hebt daar de situatie beschreven als er één adviseur een zwarte stip had en als er twee adviseurs een zwarte stip hadden. Maar hoe zit het met drie zwarte stippen? Geef in Brainbox een duidelijke beschrijving bij drie adviseurs met een zwarte stip hoe de adviseurs weten wie een zwarte stip heeft. Geef onder andere antwoord op de volgende vragen:

- Wat ziet/weet een adviseur met een zwarte stip?
- Wat ziet/weet een adviseur met een witte stip?
- Wanneer stappen er adviseurs naar voren?

- **Huiswerk 3b: Uitgaan**

Los de onderstaande puzzel op. Geef in Brainbox duidelijk aan hoe je aan je oplossing gekomen bent.

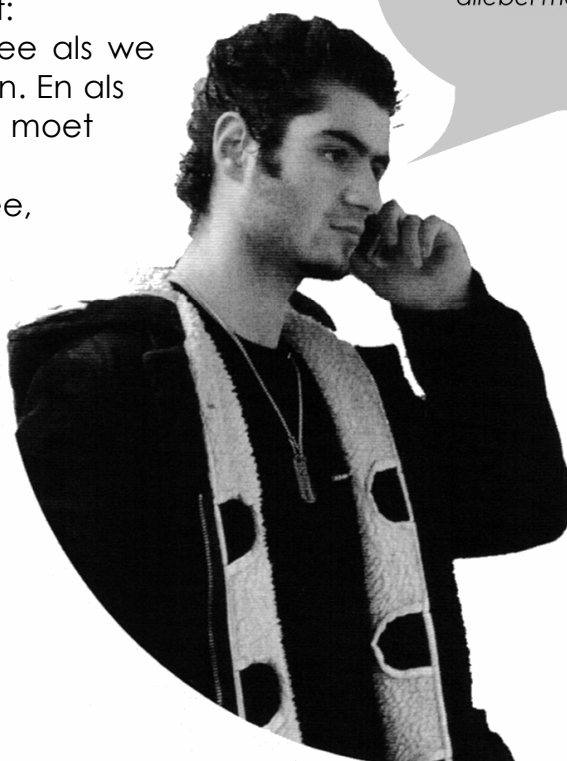
Petra wil vrijdagavond uitgaan en belt haar vrienden met de vraag wie er zin heeft om mee te gaan. De vrienden hebben allemaal zo hun eisen. Dit zijn de antwoorden die Petra krijgt:

Marieke: 'Ja, ik wil wel mee als we minimaal met z'n drieën zijn. En als Omar meegaat, dan moet Natasja ook meegaan.'

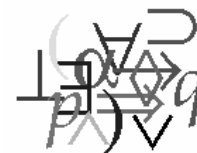
Natasja: 'Ja, ik ga mee, maar alleen als Omar én Marieke ook meegaan.'

Omar: 'Ik ga mee, maar niet als Marieke en Natasja allebei meegaan.'

Wie gaan er op stap en wie blijven er thuis?



*Ik ga mee,
maar niet als
Marieke en Natasja
allebei meegaan.*



Les 6: Formules in de Propositielogica

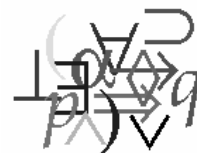
De afgelopen lessen heb je al verschillende beweringen bekeken. Ook hebben we gezien dat we beweringen konden combineren. Van de beweringen 'een kaart in het rijtje is groen' en 'de vorige kaart in het rijtje is groen' hebben we bijvoorbeeld gemaakt: '**Als** een kaart in het rijtje groen is, **dan** is de vorige kaart in het rijtje ook groen.' Als-dan verbindt de twee beweringen en noemen we een connectief. Andere connectieven die we al gezien hebben zijn: 'en', 'of', 'niet' en 'juist dan als'. Laten we de symbolen voor deze connectieven eens op een rijtje zetten.

Symbool:	Uitspraak:
$\dots \wedge \dots$	$\dots$ en $\dots$
$\dots \vee \dots$	$\dots$ of $\dots$
$\neg \dots$	niet- $\dots$
$\dots \Rightarrow \dots$	als $\dots$, dan $\dots$
$\dots \Leftrightarrow \dots$	$\dots$ juist dan als $\dots$

Deze symbolen gaan we gebruiken om beweringen om te zetten naar formules van de Propositielogica ('uitsprakenlogica'). De waarheid van zo'n formule kunnen we vervolgens met een waarheidstabel bepalen. We gaan dus praten in de taal van de Propositielogica. Bij de connectieven 'en' en 'of' moeten we oppassen. In de gewone taal geeft 'en' vaak, naast de samenvoeging van twee deelbeweringen, ook een tijdsvolgorde aan. De gebeurtenis uit de tweede zinshelft vindt dan later plaats dan de gebeurtenis uit de eerste zinshelft. Een tweetal voorbeelden:

- Femke **en** Lotte komen naar het feest.
- Pieter kwam de kamer binnen **en** deed het licht aan.

In de eerste zin staan de deelbeweringen 'Femke komt naar het feest' en 'Lotte komt naar het feest' op zichzelf. Dit 'en' (oftewel: $\wedge$) gebruiken we in de Propositielogica. In de tweede zin volgen de twee deelbeweringen 'Pieter kwam de kamer binnen' en 'Pieter deed het licht aan' op elkaar. Dit tijdselement kunnen we niet in de Propositielogica uitdrukken.



Het connectief 'of' kan ook voor verwarring zorgen. In het Nederlands heeft 'of' namelijk twee betekenissen. Kijk maar eens naar de volgende twee voorbeelden:

- Kinderen hebben alleen toegang met hun vader **of** hun moeder.
- Voor je verjaardag krijg je een iPod **of** nieuwe schoenen.

De zinnen kun je als volgt herschrijven:

- Kinderen hebben alleen toegang met hun vader **en/of** hun moeder.
- Voor je verjaardag krijg je **òf** een iPod **òf** nieuwe schoenen.

In de eerste zin kan een kind alleen met zijn vader, alleen met zijn moeder, maar ook met beide ouders naar binnen. Dit 'of' noemen we het logische 'of' (oftewel: $\vee$). In de vraag: 'Wil je suiker **of** melk in je koffie?' komt de betekenis van dit 'of' nog duidelijker naar voren.

Bij de tweede zin zul je een keuze moeten maken. Het zal niet de bedoeling zijn dat je beide cadeaus krijgt. Dit 'of' noemen we het exclusieve 'of'. In deze lessenserie zullen we alleen het logische 'of' (en/of) bekijken.

Een formule in de Propositielogica bestaat dus uit deelbeweringen/uitspraken die we aangeven met hoofdletters A, B, C, ... en connectieven. Die hoofdletters noemen we propositieletters. Laten we twee van de bovenstaande zinnen eens vertalen naar een formule in de Propositielogica:

1) Nederlandse zin: 'Femke en Lotte komen naar het feest.'

A: Femke komt naar het feest

B: Lotte komt naar het feest

$\wedge$: en

Formule: $A \wedge B$

2) Nederlandse zin:

'Kinderen hebben alleen toegang met hun vader of hun moeder.'

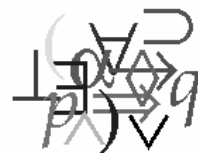
A: kinderen hebben alleen toegang met hun vader

B: kinderen hebben alleen toegang met hun moeder

$\vee$: of

Formule: $A \vee B$





Soms zul je een zin eerst moeten herschrijven voordat je hem kunt vertalen naar een formule. Een voorbeeld:

- Marloes fietst als haar auto kapot is of als het mooi weer is.

Hier staat dus een als...dan...-bewering:

- Als Marloes' auto kapot is of als het mooi weer is, dan fietst Marloes.

We gaan nog een stapje verder:

- **Als** (Marloes' auto kapot is **of** het mooi weer is), **dan** fietst Marloes.

Deze bewering kunnen we uitsplitsen naar de volgende deelbeweringen:

A: Marloes' auto is kapot

B: het is mooi weer

C: Marloes fietst

Met de connectieven voor 'als-dan' ($\Rightarrow$) en 'of' ($\vee$) krijgen we nu de volgende formule:

- $(A \vee B) \Rightarrow C$

Opdracht 22:

Vertaal de onderstaande zinnen naar een formule in de Propositielogica. Geef eerst aan wat de deelbeweringen zijn. Gebruik voor de connectieven de symbolen van pagina 37.

a) Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180° .

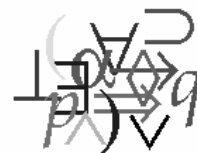
A: _____

B: _____

Formule: _____

b) Kim zit 's ochtends op school of spijbelt.

c) Als ik 'Hoe-oe! Ik ben thuis!' roep en Hans is thuis, dan geeft hij geen antwoord.



- d) Ik heb een witte of een zwarte stip zodra de koning ten minste één zwarte stip schildert.

Vergeet de zin niet eerst te herschrijven!

- e) Als je op het schoolfeest een biertje wilt bestellen, moet je minimaal 16 jaar zijn.

Let op de equivalentie!

- f) Het is niet zo dat Tamara Stefan haat of de rug toekeert.

Herschrijf: niet-(_____)

P: _____

Q: _____

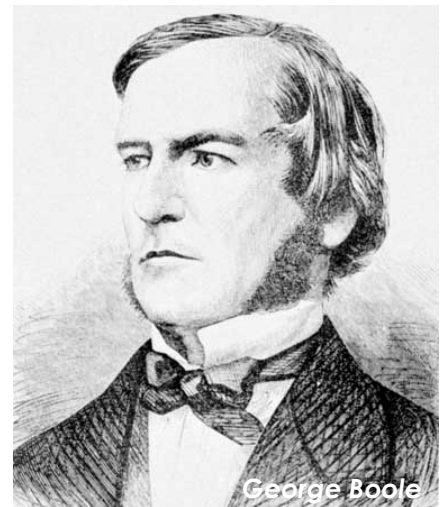
Formule: _____

- g) Het is niet zo dat als Philip de tafel heeft gedekt, hij niet hoeft af te wassen of af te drogen.

Les 7: Waarheidstabellen

In de vorige les hebben we beweringen omgeschreven naar formules in de Propositielogica. Aan zo'n formule kun je vaak niet in een keer zien wanneer zij een ware bewering oplevert. De waarheidstabellen zijn hiervoor een mooi instrument.

In de waarheidstabellen gaan we rekenen met de waarheidswaarden 0 (= onwaar) en 1 (= waar). De Engelsman George Boole (1815-1864) was hiervan de bedenker. Boole verbond in veel van zijn boeken de wereld van de Logica met de Wiskunde. Zijn wiskundige kennis heeft hij daarbij vooral met zelfstudie opgebouwd. De Booleaanse algebra's worden ook nu nog in verschillende wiskundige disciplines gebruikt. Ook vormen ze een belangrijk fundament voor logische schakelingen in computers.



In de eerste les hebben we al gezien dat een bewering waar of onwaar kan zijn. Deelbewering A, B, C, ... kunnen dus ook waar (1) of onwaar (0) zijn. Maar wat gebeurt er met de waarheidswaarden als we deelbeweringen samenvoegen met de connectieven?

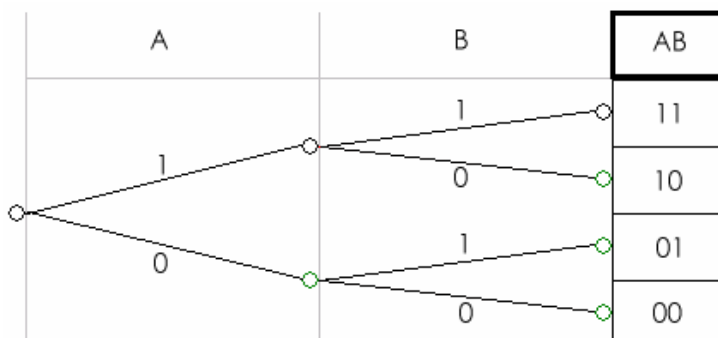
en ($\wedge$)

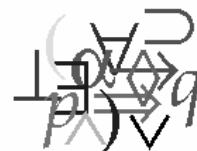
$A \wedge B$ is alleen waar als zowel A als B waar is. Kijk nog maar eens naar het voorbeeld: 'Femke en Lotte komen naar het feest.' Deze bewering is alleen waar als zowel Femke als Lotte naar het feest komt.

Hiernaast zie je de waarheidstabel voor 'en'. We moeten hiervoor $2 \times 2 = 4$ mogelijkheden bekijken, zoals je hieronder in het boomdiagram kunt aflezen.

Waarheidstabel voor 'en':

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0





of ($\vee$)

$A \vee B$ is in drie van de vier gevallen waar. Alleen als zowel A als B onwaar is, is $A \vee B$ onwaar. Kijk nog maar eens naar het voorbeeld: 'Kinderen hebben alleen toegang met hun vader of hun moeder.' Een kind mag alleen niet naar binnen als zowel zijn vader als zijn moeder niet meegaat.

Waarheidstabel voor 'of':

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Waarheidstabel voor 'niet':

A	$\neg A$
1	0
0	1

niet ($\neg$)

$\neg A$ geeft de ontkenning van A . Wat waar is, wordt onwaar. Wat onwaar is, wordt waar.

als..., dan... ($\Rightarrow$)

In opdracht 17 en 18 heb je al gezien dat je moet oppassen bij als...dan...-beweringen. $A \Rightarrow B$ is natuurlijk waar als zowel A als B waar is. Maar $A \Rightarrow B$ is ook waar als A onwaar is! Je kunt je misschien het beste afvragen: 'Wanneer lieg ik in ieder geval niet?' Probeer dat maar eens bij het volgende voorbeeld: 'Als je friet met een hamburger bestelt, dan raad ik je de hamburgerschotel aan.' Ik lieg dan alleen als je wél friet met een hamburger bestelt, maar ik je géén hamburgerschotel aanraad.

Waarheidstabel voor 'als..., dan...':

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Waarheidstabel voor 'juist dan als':

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

juist dan als ($\Leftrightarrow$)

Voor $A \Leftrightarrow B$ (equivalentie) moet $A \Rightarrow B$ gelden, maar ook $B \Rightarrow A$.

$A \Leftrightarrow B$ is dus alleen waar als A en B beide waar zijn en als A en B beide onwaar zijn.



 Opdracht 23:

a) Vul voor de formule $\neg\neg A$ de onderstaande waarheidstabel in.

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
1		
1		
0		
0		

b) Dus: $\neg\neg A \Leftrightarrow$ _____ (wet van de dubbele negatie)

c) Vul voor de formule $\neg(A \wedge B)$ de onderstaande waarheidstabel in.

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

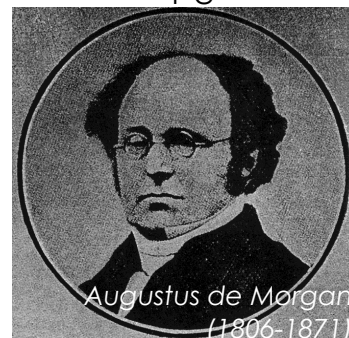
d) Vul voor de formule $\neg A \vee \neg B$ de onderstaande waarheidstabel in.

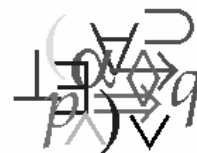
A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

e) Kijk nog eens naar de laatste kolom van opgave **c** en van opgave **d**.

Hieruit volgt: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow$ _____

(wet van De Morgan).





 Opdracht 24:

In opdracht 15 heb je vier beweringen bij de regel van de kaartjes 'Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.' bekeken. Je hebt daarbij de schrijfwijze al verkort met de implicatiepijl. We gaan die vier beweringen in deze opdracht in waarheidstabellen verwerken. Noem:

A: een kaart is rood ($\boxed{R}$)

B: het ernaast gelegen kaartje is rood ($\boxed{\dots} \boxed{R}$)

a) Vul de volgende zinnen aan:

In plaats van een kaart is groen ($\boxed{G}$), kunnen we schrijven: een kaart is niet-rood, oftewel: _____. (Gebruik het symbool voor niet.)

In plaats van het ernaast gelegen kaartje is groen ($\boxed{\dots} \boxed{G}$), kunnen we schrijven: _____, oftewel: _____.

b) Herschrijf de vier beweringen naar formules met A en B. Maak daarbij gebruik van de symbolen voor de connectieven.

1) $\boxed{R} \Rightarrow \boxed{\dots} \boxed{R}$ wordt _____

2) $\boxed{\dots} \boxed{G} \Rightarrow \boxed{G}$ wordt _____

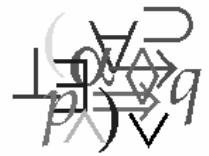
3) $\boxed{G} \Rightarrow (\boxed{\dots} \boxed{R} \text{ of } \boxed{\dots} \boxed{G})$ wordt _____

4) $\boxed{\dots} \boxed{R} \Rightarrow (\boxed{R} \text{ of } \boxed{G})$ wordt _____

c) Vul de onderstaande waarheidstabellen in voor **1)** en **2)**.

1)		
A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

2)		
A	B	



Bij de tweede waarheidstabel werd het al lastig om die uit je hoofd in te vullen. Laten we daarom bij de derde bewering naar een handig systeem gaan kijken.

De derde bewering heb je in opdracht 24 herschreven tot: $\neg A \Rightarrow (B \vee \neg B)$. Deze bewering bestaat uit twee deelbeweringen. Hierdoor zijn er vier mogelijkheden die we moeten onderzoeken. Onderstaande stappen zijn in de waarheidstabel met cursieve nummers aangegeven:

- 1) Begin je waarheidstabel altijd met links de propositieletters en rechts de formule.
- 2) Zet onder de propositieletters alle mogelijke combinaties van waarheidswaarden.
- 3) Schrijf deze waarheidswaarden over onder de letters in de formule.
- 4) Bepaal nu de waarheidswaarden van de rest van de formule. Begin daarbij met de kleinste deelformules. Let op de haakjes; die krijgen ook in de Propositielogica voorrang.

In dit voorbeeld beginnen we dus met $\neg$ van $\neg A$ en $\neg B$.

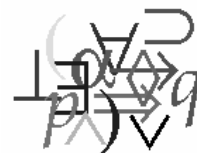
- 5) Vervolgens is $\vee$ aan de beurt. Het gaat hier om de 'of' van de kolommen direct voor en na het $\vee$ -symbool.
- 6) Als laatste de implicatie. Het gaat hier om de implicatie tussen de kolom $\neg$ van $\neg A$ en de kolom $\vee$ van $(B \vee \neg B)$.

Waarheidstabel:

↓ letters:		↓ formule:							
A	B	$\neg A \Rightarrow (B \vee \neg B)$							
1	1	0	1	1	1	0	1		
1	0	0	1	1	0	1	1	0	
0	1	1	0	1	1	1	0	1	
0	0	1	0	1	0	1	1	0	
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
2	2	4	3	6	3	5	4	3	



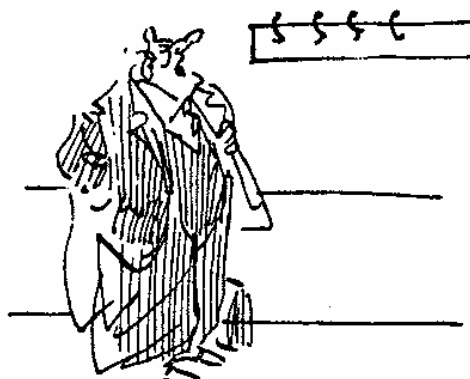
Gelukkig verschijnen er hier in de vetgedrukte kolom alleen maar 1-tjes. We weten namelijk al dat het niet uitmaakt of er na een groene kaart een rode of een groene kaart volgt. Deze bewering is dus voor elke combinatie van A en B waar! Een uitspraak die altijd waar is noemen we een tautologie. De eenvoudigste tautologieën zijn van de vorm $P \Rightarrow P$. Neem voor P bijvoorbeeld 'ik praat'. Dan krijg je: 'Als ik praat, dan praat ik'. Zie daar nog maar eens een speld tussen te krijgen!



Opdracht 25:

- a) Probeer de waarheidstabel voor de vierde bewering uit opdracht 24 nu zelf in te vullen.

- b) Is deze bewering een tautologie? Verklaar je antwoord.



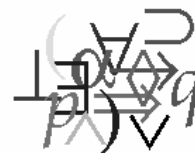
"HOE-OE!
IK BEN THUIS!"

Opdracht 26:

Kijk nog eens naar je formule bij opdracht 22c, die hoort bij de bewering:
'Als ik 'Hoe-oe! Ik ben thuis!' roep en Hans is thuis, dan geeft hij geen antwoord.'

- a) Neem deze formule hier over: _____
- b) Uit hoeveel deelbeweringen bestaat deze formule? _____
- c) Hoeveel waarheidswaarden kan elke propositieletter hebben? _____
- d) Hoeveel mogelijkheden moeten we dus onderzoeken?

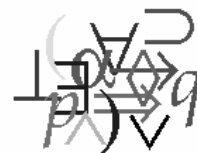
- e) Vul de waarheidstabel op de volgende bladzijde in.



f) In welk(e) geval(len) verschijnt er een 0 onder de implicatiepijl?
Verklaar je antwoord.

g) Is deze bewering een tautologie? Verklaar je antwoord.





 Opdracht 27:

Kijk nog eens naar je formule bij opdracht 22g, die hoort bij de bewering:

'Het is niet zo dat als Philip de tafel heeft gedekt, hij niet hoeft af te wassen of af te drogen.'

a) Neem deze formule hier over: _____

b) Maak bij deze formule een waarheidstabel.

c) Wanneer is deze bewering waar?

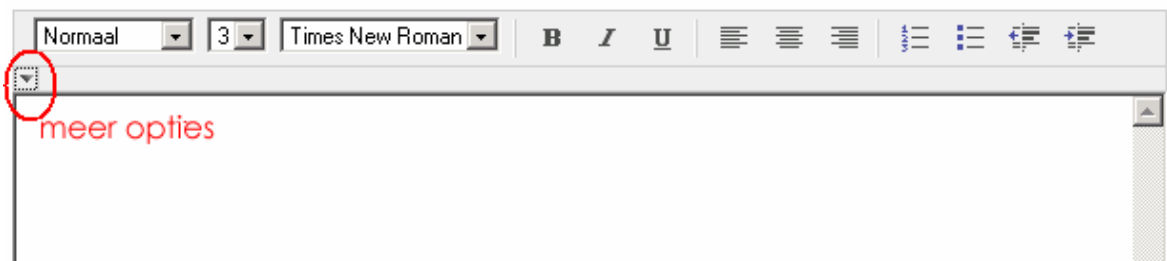
Huiswerk 4

Huiswerk 4 bestaat uit de volgende opdracht:

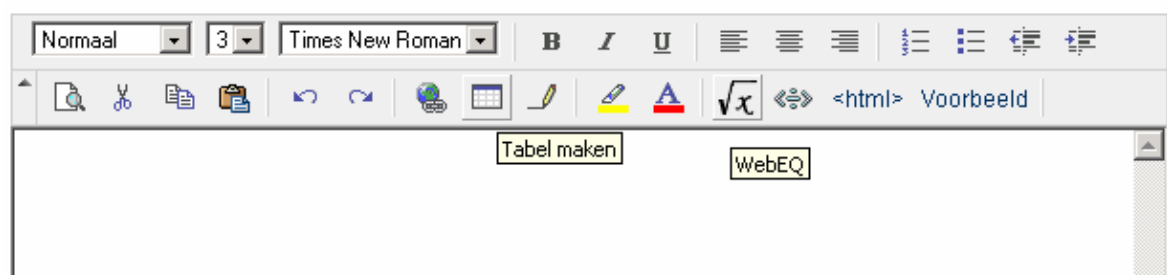
- **Huiswerk 4: Propositielogica**

In deze Brainboxopdracht word je gevraagd zelf een bewering met minimaal twee connectieven te verzinnen. Vervolgens ga je jouw bewering vertalen naar een formule in de Propositielogica en op waarheid onderzoeken met behulp van een waarheidstabel. Houd dit boekje bij de hand, want je zult af en toe iets terug moeten zoeken.

In deze opdracht zul je in Brainbox de vergelijkingseditor 'WebEQ' en de optie 'Tabel maken' nodig hebben. Hieronder staan schermafbbeeldingen van deze functies.



Door op het pijltje onder de tekstopaties te klikken verschijnen er meer opties.



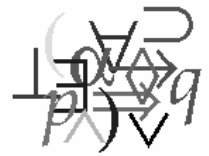
'Tabel maken' en 'WebEQ'.

Op de volgende pagina vind je hiervan schermafbbeeldingen.

Vergelijking bewerken:

Naam van vergelijking:

Tekengrootte: Breedte aanpassen: Hoogte aanpassen:



Les 8: Tot slot

In huiswerk 3 heb je de onderstaande puzzel informeel opgelost. Laten we eens kijken of we met onze kennis over formules en waarheidstabellen diezelfde puzzel nu formeel met behulp van de Propositielogica kunnen oplossen.

Petra wil vrijdagavond uitgaan en belt haar vrienden met de vraag wie er zin heeft om mee te gaan. De vrienden hebben allemaal zo hun eisen. Dit zijn de antwoorden die Petra krijgt:

Marieke: 'Ja, ik wil wel mee als we minimaal met z'n drieën zijn. En als Omar meegaat, dan moet Natasja ook meegaan.'

Natasja: 'Ja, ik ga mee, maar alleen als Omar én Marieke ook meegaan.'

Omar: 'Ik ga mee, maar niet als Marieke en Natasja allebei meegaan.'

Petra wil sowieso uitgaan en laat zich leiden door de eisen van haar vrienden. Laten we daarom de vrienden van Petra de volgende propositieletters geven:

M: Marieke

N: Natasja

O: Omar

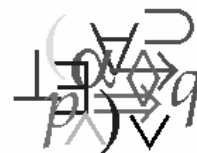
Marieke, Natasja en Omar zijn equivalent met hun eisen. Door deze eisen om te zetten in formules, kunnen we met een waarheidstabel op zoek gaan naar de situatie waar aan alle drie de eisen is voldaan.

Marieke is equivalent met de eis: 'Als Omar meegaat, dan moet Natasja ook meegaan.' Korter: 'Als Omar, dan Natasja.' Door Marieke hieraan equivalent te stellen en de drie eisen samen te bekijken, kunnen we het stukje 'minimaal met z'n drieën' buiten beschouwing laten.

In formulevorm: $M \Leftrightarrow (O \Rightarrow N)$.



$$M \Leftrightarrow (O \Rightarrow N)$$



 Opdracht 28:

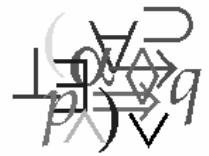
- a) Geef op dezelfde manier de formules bij de eisen van Natasja en Omar.

Laat je formules voordat je verder gaat door de docent controleren.

- b) Vul de waarheidstabel verder in.

M	N	O	$M \Leftrightarrow (O \Rightarrow N)$		
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

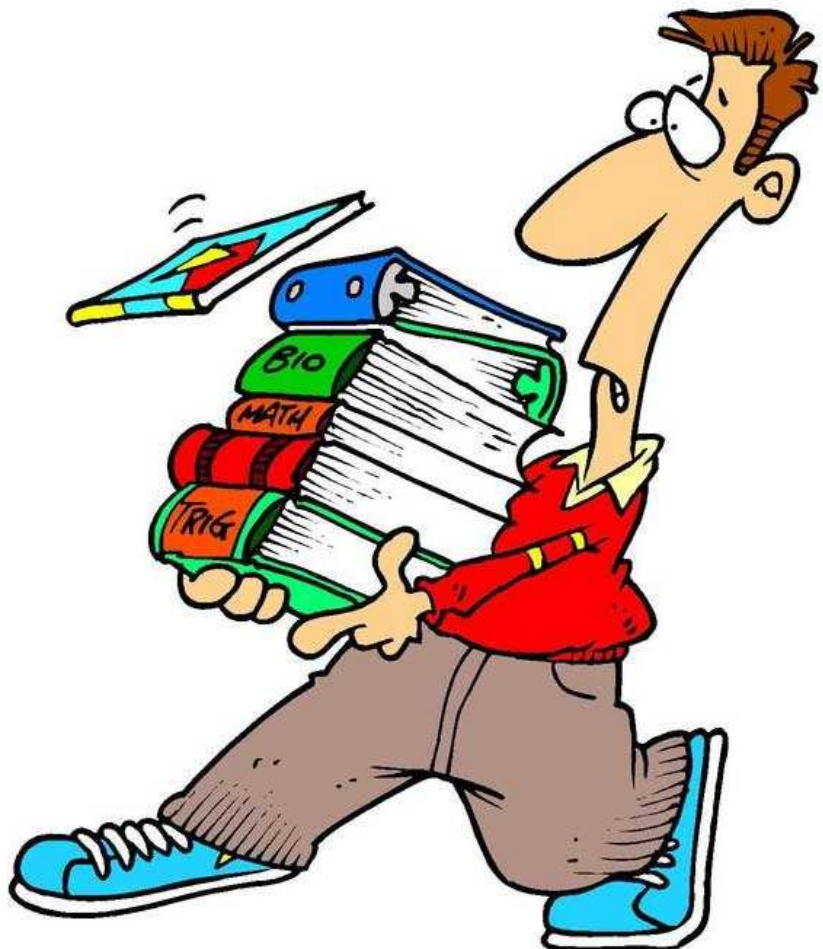
- c) Hoe kun je nu aflezen met wie Petra op stap gaat? Verklaar je antwoord.

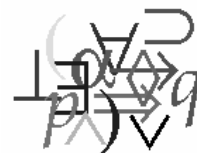


In de vorige opdracht heb je gekeken naar de situatie wanneer alle drie de formules waar zijn. We hebben dus de 'en' genomen van die drie formules. Met de waarheidstabel kon je zo de oplossing snel aflezen.

Hiermee zijn we aan het einde gekomen van deze lessenserie. Centraal stonden de als...dan...beweringen. Je hebt als...dan... gebruikt bij de kaartjes, bij verschillende beweringen, bij (meetkundige) bewijzen, bij de wijze adviseurs, bij verdraaide redeneringen en bij Hopelijk heb je onthouden dat in het Nederlands de woorden **als** en **dan** in als...dan...-beweringen lang niet altijd zichtbaar zijn.

De Propositielogica heeft je uiteindelijk met de waarheidstabellen een handig hulpmiddel gegeven om ingewikkelde problemen eenvoudig te kunnen oplossen. Ook daar moest je bij de waarheidstabel voor $\Rightarrow$ (als..., dan...) oppassen! Doe er je voordeel mee.





Extra opgaven

Opdracht 29:

- a) Vul voor de formules $\neg(A \vee B)$ en $\neg A \wedge \neg B$ de onderstaande waarheidstabel in.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$

- b) Welke conclusie kun je nu trekken?

- c) Laat met behulp van een waarheidstabel zien dat de volgende twee formules equivalent zijn:

$$A \Leftrightarrow B \text{ en } (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

- d) Laat met behulp van een waarheidstabel zien dat de volgende twee formules equivalent zijn:

$$P \Rightarrow Q \text{ en } \neg Q \Rightarrow \neg P$$

- e) Laat met behulp van een waarheidstabel zien dat de volgende formule een tautologie is:

$$P \Rightarrow P$$

- f) Laat met behulp van een waarheidstabel zien dat de volgende formule een tautologie is:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$



Opdracht 30:

De koning van een ver land heeft met zijn dienaar het idee opgevat om zijn gevangenen logische puzzels te laten oplossen. Een gevangene krijgt de keuze om een van de twee deuren te openen. Achter de ene deur zit een prinses, achter de andere deur zit een tijger. Als een gevangene goed logisch kan redeneren en de deur met de prinses weet te openen, dan blijft hij leven en mag hij met haar trouwen. Doet hij de verkeerde deur open, dan wordt hij ten prooi geworpen aan de tijger.



Los de onderstaande puzzels eerst informeel op. Probeer vervolgens je antwoord met een waarheidstabel te controleren.

- a) Een van de onderstaande uitspraken is waar. De andere niet.
Welke deur moet de gevangene kiezen?

Deur 1: In deze kamer zit een prinses en in de andere kamer zit een tijger.

Deur 2: In een van de twee kamers zit een prinses en in de andere een tijger.

- b) Onderstaande uitspraken zijn beide waar of beide onwaar.
Welke deur moet de gevangene kiezen?

Deur 1: In minstens één van de twee kamers zit een prinses.

Deur 2: In de andere kamer zit een tijger.

- c) Onderstaande uitspraken zijn beide waar of beide onwaar.
Welke deur moet de gevangene kiezen?

Deur 1: Een of twee van de volgende uitspraken zijn waar:

- Er zit een tijger in deze kamer.
- Er zit een prinses in de andere kamer.

Deur 2: In de andere kamer zit een prinses.

 Opdracht 31:

In Kitty's huis lopen nogal wat katten rond.

Zeven katten eten geen Kitkat.

Zes katten eten geen KatDiner.

Vijf katten eten geen FreshFood.

Vier katten eten noch Kitkat noch FreshFood.

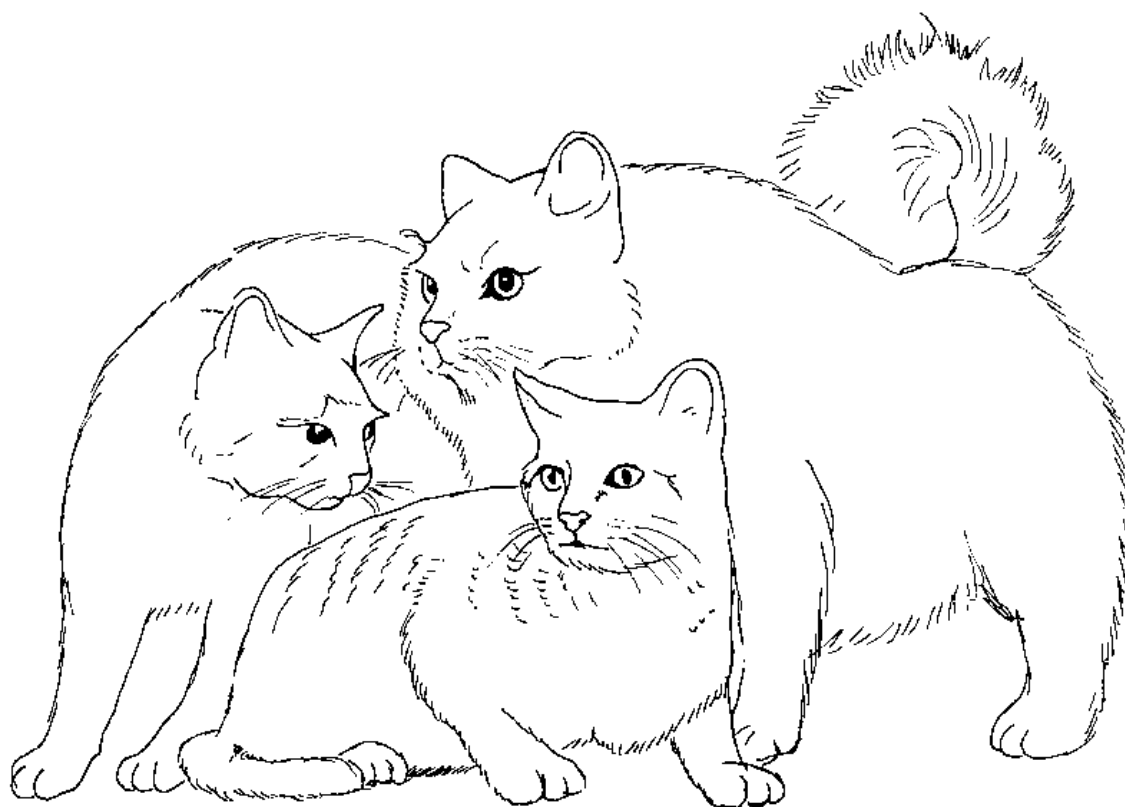
Drie katten eten noch Kitkat noch Katdiner.

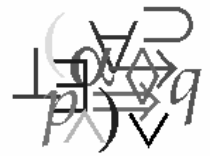
Twee katten eten noch Katdiner noch FreshFood.

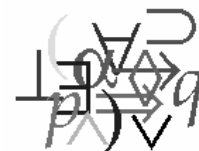
Eén kat eet noch Kitkat, noch Katdiner, noch Freshfood.

Geen enkele kat eet alle drie de soorten kattenvoer.

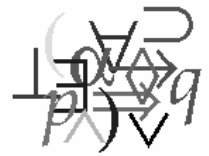
Hoeveel katten heeft Kitty?





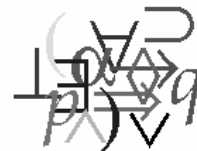


- 33. "Onderzoeksmedicatie." Janssen-Cilag. 14 april 2006
<<http://www.janssen-cilag.nl/content/backgrounders/janssen-cilag.nl/KO03.gif>>.
- 36. "Omar." Pythagoras 43.3: 12.
- 38. "Verjaardag-liedjes." Homepage. 1 mei 2006
<<http://www.uitmuntend.de/img/kleurtje/verjaardag.gif>>.
- 41. "George Boole." Saint Michael's College. 2 mei 2006
<<http://cache.eb.com/eb/image?id=6768>>.
- 42. "Logic." Homepage. 2 mei 2006
<<http://members.iinet.net.au/~marshal/Logic.jpg>>.
- 43. "De Morgan." The University of York. 8 mei 2006
<http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/people/de_morgan.gif>.
- 45. "Les vies d'Einstein." Fiami. 3 mei 2006
<<http://www.fiami.ch/EINSTEIN/img/2005-nul.jpg>>.
- 47. "Tegeltje." Elmer.tv. 3 mei 2006
<<http://images.google.nl/images?svnum=10&hl=nl&lr=&q=Lieg+niet+waarheid>>.
- 51. "Mabel/Marieke." Pythagoras 43.3: 13.
- 53. "Blokeinde." Katholieke Universiteit Leuven. 3 mei 2006
<http://www.kuleuven.ac.be/nieuwsbrief/archief/nb03/_img/blok_gr.jpg>.
- 55. "Experiment in Progress" Homepage. 3 mei 2006
<<http://www.syberg.be/zMentaleRuimte/rSys/fotos/fJ1/deur0.jpg>>.
"Tijger." RK Parochie Petrus en Paulus Bergen. 3 mei 2006
<<http://www.rkparochiebergennh.nl/images/tijger.jpg>>.
- 56. "Katten." Moesti! 3 mei 2006
<http://www.moesti.be/images/katten_10.gif>.



Referenties

- Chasiotis, Christos. "From Common Sense to Formal Logic: Use of Logical Games for the Assessment, Investigation and Improvement of Logical Reasoning." Congresbundel 47ste conferentie van CIEAEM. Berlijn: Freie Universität, 1995: 440-47.
- Eemeren, F.H. van, R. Grootendorst en Peter van Straaten. Leren argumenteren met Vader en Zoon. Amsterdam: Contact, 1996.
- Gijswijt, Dion. "Katten, katten en katten." Pythagoras 37.3 (1998): 28.
- Gottschal, Peter, Ed. Filosofie: Een introductie voor atheneum 4. Groningen: Belcampo, 2005.
- Horst, Stephan van der. "Logica - Een kennismaking. Lesbrieft bij LogSim." Informatica in het voortgezet onderwijs. 16 juni 2003. 21 februari 2006 <<http://www.informaticavo.nl/scripts/lesmateriaal.php#29>>.
- Iemhoff, Rosalie, Dick de Jongh en Marco Vervoort. Logika voor AI. Werkboek. Amsterdam: Faculteit NWI Universiteit van Amsterdam, 2002. Homepage. 2 september 2002. 30 december 2005 <<http://staff.science.uva.nl/~vervoort/LAI/werkboek.pdf>>.
- Kooi, Barteld P. Persoonlijk interview. 17 januari 2006.
- Krabbe, Erik C.W. en Phoebe Kradavis. Logica 1: Argument en Dialoog, gevolgd door Parvulae Logicales: Inleiding en Syllogistiek. Groningen: Faculteit der Wijsbegeerte Rijksuniversiteit Groningen, 2005.
- Krabbe, Erik C.W., ed. Logica 3: Model, Oneindigheid en Paradox. Groningen: Faculteit der Wijsbegeerte Rijksuniversiteit Groningen, 2005.
- Renardel de Lavalette, Gerard R. Colloquium. Rijksuniversiteit Groningen. Groningen, 1 december 2005.
- Roberts, Tim S. "A ham sandwich is better than nothing: Some thoughts about transitivity." Australian Senior Mathematics Journal 18.2: 60-64.
- Smullyan, Raymond. The Lady or the Tiger and Other Logical Puzzles. Harmondsworth, Middlesex, England: Penguin Books Ltd, 1982. 24-35.
- Swaen, Marco. Bewijzen, bronnencursus 'bewijzen' LP de postkamer. Amsterdam: Hogeschool van Amsterdam, 1997.
- Swaen Marco. E-mail interview. 25 januari – 1 april 2006.



- Swaen, Marco. "Logisch denken of rekenen." Pythagoras 43.3 (2003): 8-13.
- Swaen, Marco. Telefonisch interview. 24 februari 2006.
- Swart, Harrie de. "Wiskunde, Logica, Bewijzen en Argumenteren." Euclides 81.4 (2006): 206-09.
- Thijsse, Elias. Logica in de praktijk. Schoonhoven: Academic Service, 2000.
- Tiggelaar, Harm. Persoonlijk interview. 29 maart 2006.
- Tolboom, Léon. E-mail interview Brainbox. Januari – april 2006.
- Verbrugge, Rineke. Persoonlijk interview. 3 april 2006.
- Vos, Pauline. Persoonlijk interview. November 2005 – mei 2006.
- Vuijk, R.A.J., et al. Getal & Ruimte 2HV2. Houten: Educatieve Partners Nederland, 1999. 2-12.
- Vuijk, R.A.J., et al. Getal & Ruimte 3V1. Houten: Educatieve Partners Nederland, 2000. 58-63.
- Wansink, Thijs. Concepttest. 20 februari – 5 mei 2006.

C2: Export huiswerkopdrachten vanuit Brainbox

Huiswerk 1:

Huiswerk 1a: Kaartjes

Huiswerk 1b: Beweringen

Huiswerk 2:

Huiswerk 2a: Bewijzen

Huiswerk 2b: Kaartjes

Huiswerk 3:

Huiswerk 3a: De wijze adviseurs

Huiswerk 3b: Uitgaan

Huiswerk 4: Propositielogica

Elke huiswerkopdracht wordt gevolgd door de feedbackpagina uit Brainbox. Bij een aantal open opgaven is geen feedback beschikbaar, omdat de feedback afhankelijk is van het door de leerling gegeven antwoord.



Huiswerk 1



Huiswerk 1

Huiswerk 1 bestaat uit twee opdrachten:

- * Huiswerk 1a: Kaartjes

- * Huiswerk 1b: Beweringen

De links naar deze opdrachten staan hieronder.

Zorg dat je onder je eigen naam bent ingelogd voordat je de opdrachten gaat maken.

Deadline: donderdag 13 april 12:00uur.



Huiswerk 1a: Kaartjes

Huiswerk 1a bij Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica (= handelingsdeel).

Deadline: donderdag 13 april 12:00uur.



Huiswerk 1b: Beweringen

Huiswerk 1b bij Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica (= handelingsdeel).

Deadline: donderdag 13 april 12:00uur.



Voorbeeld van beoordeling Huiswerk 1a: Kaartjes

Naam: Huiswerk 1a: Kaartjes

Instructies: Maak de onderstaande opgaven. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.

Meerdere pogingen: Niet toegestaan. Deze Toets kan slechts eenmaal worden gemaakt.

Voltooiing afdwingen: Deze Toets kan worden opgeslagen en later worden hervat.

Vraagvoltooiingstatus:

Vraag 1

1 punten[Opslaan](#)

Je ziet hieronder steeds een rijtje van vijf kaarten. Elke kaart is rood (**R**) of groen (**G**) gekleurd. We bekijken de rijtjes van links naar rechts. Ga na of elk rijtje voldoet aan de volgende regel:

'Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'

Kies 'Ja' als voldaan wordt aan de bovenstaande regel.
Kies 'Nee' als niet voldaan wordt aan de bovenstaande regel.
Kies 'X' als je dat niet kunt weten.

R	R	R	R	R
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 2

1 punten[Opslaan](#)

R	R	R	R	G
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 3

1 punten[Opslaan](#)

R	G	R	G	R
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 4

1 punten

[Opslaan](#)

R	R	R	G	G
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 5

1 punten

[Opslaan](#)

G	G	R	R	R
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 6

1 punten

[Opslaan](#)

G	R	G	R	G
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 7

1 punten

[Opslaan](#)

G	G	G	R	R
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 8

1 punten

[Opslaan](#)

R	R	G	G	G
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 9

1 punten

[Opslaan](#)

G	G	G	G	R
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 10

1 punten

[Opslaan](#)

G	R	R	R	R
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 11

1 punten

[Opslaan](#)

R	G	G	G	G
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 12

1 punten

[Opslaan](#)

G	G	G	G	G
---	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X



Beoordeling doornemen: Huiswerk 1a: Kaartjes

Naam: Huiswerk 1a: Kaartjes

Status: Completed

Score: 0 van de 12 punten

Instructies: Maak de onderstaande opgaven. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.

Vraag 1 0 van 1 punten

Je ziet hieronder steeds een rijtje van vijf kaarten. Elke kaart is rood (**R**) of groen (**G**) gekleurd. We bekijken de rijtjes van links naar rechts. Ga na of elk rijtje voldoet aan de volgende regel:

'Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'

Kies 'Ja' als voldaan wordt aan de bovenstaande regel.

Kies 'Nee' als niet voldaan wordt aan de bovenstaande regel.

Kies 'X' als je dat niet kunt weten.



R	R	R	R	R
---	---	---	---	---

Geselecteerd antwoord: **X** [Geen gegeven]

Juist antwoord: **✓** Ja

Feedback: Alle kaartjes zijn rood, dus er is aan de regel voldaan.

Vraag 2 0 van 1 punten

R	R	R	R	G
---	---	---	---	---



Geselecteerd antwoord: **X** [Geen gegeven]

Juist antwoord: **✓** Nee

Feedback: Na een rode kaart kan geen groene kaart meer volgen.

Vraag 3 0 van 1 punten

R	G	R	G	R
---	---	---	---	---



Geselecteerd antwoord: **X** [Geen gegeven]

Juist antwoord: **✓** Nee

Feedback: Na een rode kaart kan geen groene kaart meer volgen.

Vraag 4 0 van 1 punten

R	R	R	G	G
---	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Nee**Feedback:** Na een rode kaart kan geen groene kaart meer volgen.**Vraag 5** 0 van 1 punten

G	G	R	R	R
---	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Ja**Feedback:** De regel zegt alleen dat ná een rode kaart een rode kaart volgt. Vóór een rode kaart mogen dus best groene kaarten staan.**Vraag 6** 0 van 1 punten

G	R	G	R	G
---	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Nee**Feedback:** Na een rode kaart kan volgens de gegeven regel geen groene kaart meer volgen.**Vraag 7** 0 van 1 punten

G	G	G	R	R
---	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Ja**Feedback:** Zo gauw je een rode kaart tegenkomt, moet de volgende kaart ook rood zijn. Hier is dat ook zo (laatste twee kaarten).**Vraag 8** 0 van 1 punten

R	R	G	G	G
---	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Nee**Feedback:** Van rechts naar links gelezen is dit rijtje goed gerangschikt. Maar van links naar rechts niet, want na een rode kaart kan geen groene kaart meer volgen.**Vraag 9** 0 van 1 punten

G	G	G	G	R
---	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Ja**Feedback:** Er is maar één rode kaart en die staat netjes achteraan.

Vraag 10 0 van 1 punten

G	R	R	R	R
---	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Ja**Feedback:** De enige groene kaart staat op de eerste plek. Daarna volgen alleen maar rode, dus wordt er aan de gegeven regel voldaan.**Vraag 11** 0 van 1 punten

R	G	G	G	G
---	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Nee**Feedback:** De rode kaart hoort op de laatste plek. Na een rode kaart kan namelijk geen groene kaart meer volgen.**Vraag 12** 0 van 1 punten

G	G	G	G	G
---	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Ja**Feedback:** Een rijtje zonder rode kaarten voldoet altijd aan de gegeven regel.



Voorbeeld van beoordeling Huiswerk 1b: Beweringen

Naam: Huiswerk 1b: Beweringen

Instructies: Maak de onderstaande opgaven. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.

Meerdere pogingen: Niet toegestaan. Deze Toets kan slechts eenmaal worden gemaakt.

Voltooiing afdwingen: Deze Toets kan worden opgeslagen en later worden hervat.

▼ Vraagvoltooiingstatus:

Vraag 1

2 punten

In opdracht 2 (pagina 8) heb je zelf twee **als...dan...**-redeneringen opgeschreven. Neem deze redeneringen hieronder over.

Normaal 3 Times New Roman **B** *I* U [List Icons]

Vraag 2

2 punten

Zijn jouw redeneringen uit opdracht 2 beweringen? Geef een duidelijke toelichting.

Normaal 3 Times New Roman **B** *I* U [List Icons]

Vraag 3

1 punten[Opslaan](#)

Maak een ware bewering met de volgende gegevens:

- * het getal '4'
- * het getal '5'
- * het symbool voor kleiner dan ('<')

Vraag 4**1 punten**

'1000 m' is geen bewering. Maak met het gegeven '1000 m' een ware bewering.
(m = meter)

Normaal	▼	3	▼	Times New Roman	▼	B	<i>I</i>	<u>U</u>			

Vraag 5**2 punten**

Verzin zelf nog een originele bewering. Geef ook aan of jouw bewering waar of onwaar is.

Dat hoeft dus geen wiskundige bewering te zijn!

Normaal	▼	3	▼	Times New Roman	▼	B	<i>I</i>	<u>U</u>			



Beoordeling doornemen: Huiswerk 1b: Beweringen

Naam: Huiswerk 1b: Beweringen
Status: Needs Grading
Score: Cijfer is niet beschikbaar.
Instructies: Maak de onderstaande opgaven. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.

Vraag 1 Cijfer nodig

In opdracht 2 (pagina 8) heb je zelf twee **als...dan...**-redeneringen opgeschreven. Neem deze redeneringen hieronder over.



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 2 Cijfer nodig

Zijn jouw redeneringen uit opdracht 2 beweringen? Geef een duidelijke toelichting.



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 3 0 van 1 punten

Maak een ware bewering met de volgende gegevens:

- * het getal '4'
- * het getal '5'
- * het symbool voor kleiner dan ('<')



Geselecteerd antwoord: ✗[Geen gegeven]

Juist antwoord: ✓4<5
 ✓4 is kleiner dan 5
 ✓4 < 5

Vraag 4 Cijfer nodig

'1000 m' is geen bewering. Maak met het gegeven '1000 m' een ware bewering. (m = meter)



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 5 Cijfer nodig

Verzin zelf nog een originele bewering. Geef ook aan of jouw bewering waar of onwaar is.

Dat hoeft dus geen wiskundige bewering te zijn!



**Geselecteerd
antwoord:**

[Geen gegeven]

Juist antwoord:

[Geen]

Feedback:

Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.



Huiswerk 2



Huiswerk 2

Huiswerk 2 bestaat uit twee opdrachten:

- * Huiswerk 2a: Bewijzen

- * Huiswerk 2b: Kaartjes

De links naar deze opdrachten staan hieronder.

Zorg dat je onder je eigen naam bent ingelogd voordat je de opdrachten gaat maken.

Deadline: maandag 24 april 12:00uur.



Huiswerk 2a: Bewijzen

Huiswerk 2a bij Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica (= handelingsdeel).

Deadline: maandag 24 april 12:00uur.



Huiswerk 2b: Kaartjes

Huiswerk 2b bij Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica (= handelingsdeel).

Deadline: maandag 24 april 12:00uur.



Voorbeeld van beoordeling Huiswerk 2a: Bewijzen

Naam:	Huiswerk 2a: Bewijzen
Instructies:	Maak de onderstaande opgaven. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.
Meerdere pogingen:	Niet toegestaan. Deze Toets kan slechts eenmaal worden gemaakt.
Voltooiing afdwingen:	Deze Toets kan worden opgeslagen en later worden hervat.

Vraagvoltooiingstatus:

Vraag 1

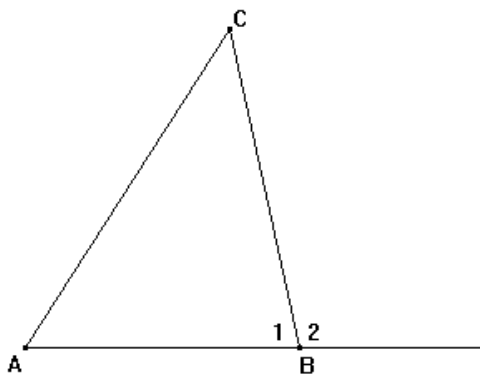
4 punten

[Opslaan](#)

Bewering: 'In elke driehoek is de som van twee hoeken gelijk aan de buitenhoek van de derde hoek.'

Oftwel: 'Als ik een driehoek heb, dan is de som van twee hoeken gelijk aan de buitenhoek van de derde hoek.'

We nemen een willekeurige driehoek ABC (zie figuur hieronder).



Gegeven:
Driehoek ABC .

Te bewijzen:
We vertalen de bewering naar onze driehoek ABC .
We willen bewijzen dat: hoek A + hoek C = hoek B_2 .

Bewijs (vul verder in, schrijf voor 'hoek B_1 ' en 'hoek B_2 ' gewoon 'hoek B_1 ' en 'hoek B_2 '):

(1) hoek A + hoek B_1 + hoek C = 180° ,

dus hoek A + hoek C = $180^\circ -$

(2) hoek B_1 + hoek B_2 = 180°

dus hoek B_2 = $180^\circ -$

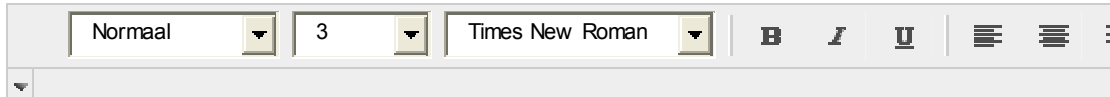
Dus uit (1) en (2) volgt:

hoek A + hoek C =

Q.E.D.

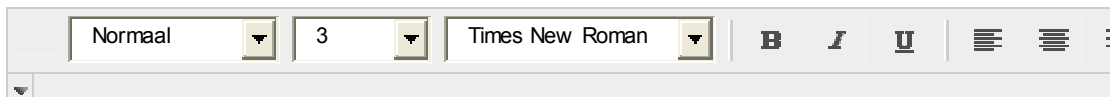
Vraag 2**2 punten**

Kun je bij de bovenstaande bewering: *'in elke driehoek is de som van twee hoeken gelijk aan de buitenhoek van de derde hoek'* nu toch nog een tegenvoorbeeld geven? Geef een duidelijke toelichting.

A rich text editor toolbar with a dropdown menu on the left showing 'Normaal', a font size dropdown showing '3', a font family dropdown showing 'Times New Roman', and icons for bold (B), italic (I), underline (U), bulleted list, numbered list, and indent.**Vraag 3****5 punten**

Verzin zelf een meetkundige bewering. Lever ook een bewijs bij een ware bewering of geef een tegenvoorbeeld bij een onware bewering.

Meer opties (bijv. link of tabel invoegen, vergelijkingseditor of kleurtjes) verschijnen door op het pijltje onder de tekstopties te klikken.

A rich text editor toolbar with a dropdown menu on the left showing 'Normaal', a font size dropdown showing '3', a font family dropdown showing 'Times New Roman', and icons for bold (B), italic (I), underline (U), bulleted list, numbered list, and indent.



Beoordeling doornemen: Huiswerk 2a: Bewijzen

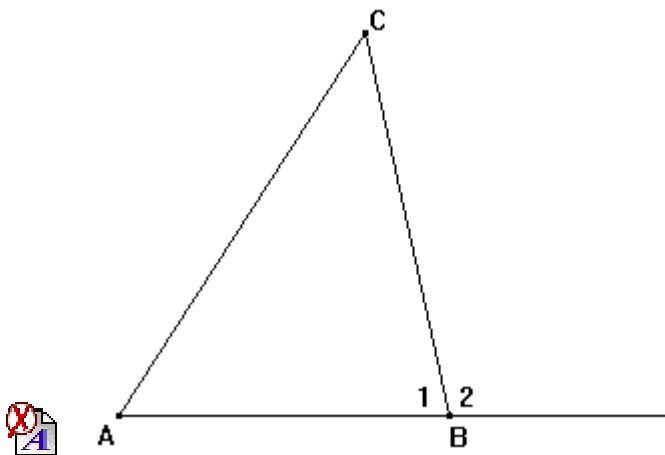
Naam:	Huiswerk 2a: Bewijzen
Status:	Needs Grading
Score:	Cijfer is niet beschikbaar.
Ontbrekende vragen:	?
Instructies:	Maak de onderstaande opgaven. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.

Vraag 1 0 van 4 punten

Bewering: 'In elke driehoek is de som van twee hoeken gelijk aan de buitenhoek van de derde hoek.'

Oftwel: 'Als ik een driehoek heb, dan is de som van twee hoeken gelijk aan de buitenhoek van de derde hoek.'

We nemen een willekeurige driehoek ABC (zie figuur hieronder).



Gegeven:
Driehoek ABC .

Te bewijzen:
We vertalen de bewering naar onze driehoek ABC .
We willen bewijzen dat: hoek A + hoek C = hoek B_2 .

Bewijs (vul verder in, schrijf voor 'hoek B_1 ' en 'hoek B_2 ' gewoon 'hoek B_1 ' en 'hoek B_2 ':)

(1) hoek A + hoek B_1 + hoek C = 180° ,
dus hoek A + hoek C = 180° - **[a]**

(2) hoek B_1 + hoek B_2 = 180°
dus hoek B_2 = 180° - **[b]**

Dus uit (1) en (2) volgt:
hoek A + hoek C = **[c]**

Q.E.D.

Opgegeven antwoorden voor a ✗ [Geen gegeven]

Opgegeven antwoorden voor b ✗ [Geen gegeven]

Opgegeven antwoorden voor c ✗ [Geen gegeven]

Juiste antwoorden voor a
 ✓ hoek B1
 ✓ B1
 ✓ hoek b1
 ✓ b1

Juiste antwoorden voor b
 ✓ hoek B1
 ✓ B1
 ✓ hoek b1
 ✓ b1

Juiste antwoorden voor c
 ✓ hoek B2
 ✓ B2
 ✓ hoek b2
 ✓ b2

Vraag 2 Cijfer nodig

Kun je bij de bovenstaande bewering: *'in elke driehoek is de som van twee hoeken gelijk aan de buitenhoek van de derde hoek'* nu toch nog een tegenvoorbeeld geven? Geef een duidelijke toelichting.

Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]



Juist antwoord: ✓

Nee, je hebt immers in een willekeurige driehoek bewezen dat de som van twee hoeken gelijk is aan de buitenhoek van de derde hoek. De bewering is dus altijd waar.

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 3 Cijfer nodig

Verzin zelf een meetkundige bewering. Lever ook een bewijs bij een ware bewering of geef een tegenvoorbeeld bij een onware bewering.

Meer opties (bijv. link of tabel invoegen, vergelijkingseditor of kleurtjes) verschijnen door op het pijltje onder de tekstopties te klikken.



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.



Voorbeeld van beoordeling Huiswerk 2b: Kaartjes

Naam:	Huiswerk 2b: Kaartjes
Instructies:	Maak de onderstaande opgaven. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.
Meerdere pogingen:	Niet toegestaan. Deze Toets kan slechts eenmaal worden gemaakt.
Voltooiing afdwingen:	Deze Toets kan worden opgeslagen en later worden hervat.

Vraagvoltooiingstatus:

Vraag 1

1 punten

[Opslaan](#)

Je ziet hieronder steeds een rijtje van vijf kaarten. Bij elk rijtje zijn vier kaarten gegeven. Een vijfde kaart ligt nog omgekeerd. Je weet niet of die kaart rood (**R**) of groen (**G**) gekleurd is. We bekijken de rijtjes van links naar rechts. Ga na of elk rijtje voldoet aan de volgende regel:

'Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'

Kies 'Ja' als voldaan wordt aan de bovenstaande regel.

Kies 'Nee' als niet voldaan wordt aan de bovenstaande regel.

Kies 'X' als je dat niet kunt weten.

	R	R	R	R
--	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 2

1 punten

[Opslaan](#)

R	R		R	R
---	---	--	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 3

1 punten

[Opslaan](#)

R	R	R	R	
---	---	---	---	--

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 4

1 punten

[Opslaan](#)

	R	R	G	G
--	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 5

1 punten

[Opslaan](#)

G	G		R	R
---	---	--	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 6

1 punten

[Opslaan](#)

G	G	R	R	
---	---	---	---	--

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 7

1 punten

[Opslaan](#)

	G	G	R	R
--	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 8

1 punten

[Opslaan](#)

R	R		G	G
---	---	--	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 9

1 punten

[Opslaan](#)

R	R	G	G	
---	---	---	---	--

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 10

1 punten

[Opslaan](#)

	G	G	G	G
--	---	---	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 11

1 punten

[Opslaan](#)

G	G		G	G
---	---	--	---	---

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X

Vraag 12

1 punten

[Opslaan](#)

G	G	G	G	
---	---	---	---	--

- ☐ Ja
- ☐ Nee
- ☐ X



Beoordeling doornemen: Huiswerk 2b: Kaartjes

Naam: Huiswerk 2b: Kaartjes

Status: Completed

Score: 0 van de 12 punten

Instructies: Maak de onderstaande opgaven. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.

Vraag 1 0 van 1 punten

Je ziet hieronder steeds een rijtje van vijf kaarten. Bij elk rijtje zijn vier kaarten gegeven. Een vijfde kaart ligt nog omgekeerd. Je weet niet of die kaart rood (**R**) of groen (**G**) gekleurd is. We bekijken de rijtjes van links naar rechts. Ga na of elk rijtje voldoet aan de volgende regel:

'Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.'

Kies 'Ja' als voldaan wordt aan de bovenstaande regel.

Kies 'Nee' als niet voldaan wordt aan de bovenstaande regel.

Kies 'X' als je dat niet kunt weten.



	R	R	R	R
--	---	---	---	---

Geselecteerd antwoord: **X** [Geen gegeven]

Juist antwoord: **✓** Ja

Feedback: De laatste vier kaartjes zijn rood, dus het maakt niet uit of de eerste kaart rood of groen is. In beide gevallen is aan de bovenstaande regel voldaan.

Vraag 2 0 van 1 punten

R	R		R	R
---	---	--	---	---

Geselecteerd antwoord: **X** [Geen gegeven]

Juist antwoord: **✓** X

Feedback: Dit rijtje kan alleen voldoen aan de gegeven regel als de middelste kaart ook rood is. Je weet niet of die kaart rood is, dus je weet ook niet of dit rijtje goed geordend is.

Vraag 3 0 van 1 punten

R	R	R	R	
---	---	---	---	--

Geselecteerd antwoord: **X** [Geen gegeven]

Juist antwoord: **✓** X

Feedback: Je weet niet of de laatste kaart rood of groen is. Volgens de regel moet de kaart rood zijn, want na een rode kaart kan geen groene kaart meer volgen. Je kunt dus niet weten of dit rijtje goed geordend is.

Vraag 4 0 van 1 punten

	R	R	G	G
--	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Nee**Feedback:** Na een rode kaart kan geen groene kaart meer volgen.**Vraag 5** 0 van 1 punten

G	G		R	R
---	---	--	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Ja**Feedback:** De regel zegt alleen dat ná een rode kaart een rode kaart volgt. Vóór een rode kaart mogen dus best groene kaarten staan. Zowel GGRRR als GGRRR is een goed geordend rijtje.**Vraag 6** 0 van 1 punten

G	G	R	R	
---	---	---	---	--

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ X**Feedback:** De laatste kaart moet rood zijn. Na een rode kaart kan volgens de gegeven regel immers geen groene kaart meer volgen. Je kunt dus niet weten of dit rijtje goed geordend is.**Vraag 7** 0 van 1 punten

	G	G	R	R
--	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ X**Feedback:** De eerste kaart moet groen zijn. Je weet niet of de eerste kaart groen is, dus je weet ook niet of dit rijtje goed geordend is.**Vraag 8** 0 van 1 punten

R	R		G	G
---	---	--	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Nee**Feedback:** Na een rode kaart kan geen groene kaart meer volgen. Wat er ook op de middelste kaart staat, dit rijtje voldoet sowieso niet aan de gegeven regel.**Vraag 9** 0 van 1 punten

R	R	G	G	
---	---	---	---	--

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Nee**Feedback:** Na een rode kaart kan geen groene kaart meer volgen.

Vraag 10 0 van 1 punten

	G	G	G	G
--	---	---	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ X**Feedback:** De eerste kaart moet groen zijn. Je weet niet of de eerste kaart groen is, dus je kunt ook niet weten of dit rijtje goed geordend is.**Vraag 11** 0 van 1 punten

G	G		G	G
---	---	--	---	---

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ X**Feedback:** De middelste kaart moet groen zijn. Je weet niet of de middelste kaart groen is, dus je weet ook niet of dit rijtje goed geordend is.**Vraag 12** 0 van 1 punten

G	G	G	G	
---	---	---	---	--

**Geselecteerd antwoord:** ✗ [Geen gegeven]**Juist antwoord:** ✓ Ja**Feedback:** Het maakt niet uit of de laatste kaart rood of groen is. In beide gevallen krijg je een rijtje dat voldoet aan de gegeven regel.



Huiswerk 3



Huiswerk 3

Huiswerk 3 bestaat uit twee opdrachten:

- * Huiswerk 3a: De wijze adviseurs (beschikbaar vanaf dinsdag 25 april)
 - * Huiswerk 3b: Uitgaan (beschikbaar vanaf woensdag 26 april)
- De links naar deze opdrachten staan hieronder.

Zorg dat je onder je eigen naam bent ingelogd voordat je de opdrachten gaat maken.

Deadline: maandag 8 mei 12:00uur.



Huiswerk 3a: De wijze adviseurs

Huiswerk 3a bij Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica (= handelingsdeel).
Deadline: maandag 8 mei 12:00uur.



Huiswerk 3b: Uitgaan

Huiswerk 3b bij Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica (= handelingsdeel).
Deadline: maandag 8 mei 12:00uur.



Voorbeeld van beoordeling Huiswerk 3a: De wijze adviseurs

Naam: Huiswerk 3a: De wijze adviseurs
Instructies: Maak de onderstaande opgave. Kies daarna 'Verzenden'.
Meerdere pogingen: Niet toegestaan. Deze Toets kan slechts eenmaal worden gemaakt.
Voltooiing afdwingen: Deze Toets kan worden opgeslagen en later worden hervat.

▼ **Vraagvoltooiingstatus:**

Vraag 1

6 punten

In de klassenopdracht en in opdracht 10 aan het begin van les 4 heb je gekeken naar de wijze adviseurs. Je hebt daar de situatie beschreven als er één adviseur een zwarte stip had en als er twee adviseurs een zwarte stip hadden. Maar hoe zit het met drie zwarte stippen? Geef hieronder een duidelijke beschrijving bij drie adviseurs met een zwarte stip hoe de adviseurs weten wie een zwarte stip heeft. Geef onder andere antwoord op de volgende vragen:

- Wat ziet/weet een adviseur met een zwarte stip?
- Wat ziet/weet een adviseur met een witte stip?
- Wanneer stappen er adviseurs naar voren?

Normaal	3	Times New Roman	B	<i>I</i>	<u>U</u>	≡	≡	≡
▼								



Beoordeling doornemen: Huiswerk 3a: De wijze adviseurs

Naam:	Huiswerk 3a: De wijze adviseurs
Status:	Needs Grading
Score:	Cijfer is niet beschikbaar.
Instructies:	Maak de onderstaande opgave. Kies daarna 'Verzenden'.

Vraag 1 Cijfer nodig

In de klassenopdracht en in opdracht 10 aan het begin van les 4 heb je gekeken naar de wijze adviseurs. Je hebt daar de situatie beschreven als er één adviseur een zwarte stip had en als er twee adviseurs een zwarte stip hadden. Maar hoe zit het met drie zwarte stippen? Geef hieronder een duidelijke beschrijving bij drie adviseurs met een zwarte stip hoe de adviseurs weten wie een zwarte stip heeft. Geef onder andere antwoord op de volgende vragen:

- Wat ziet/weet een adviseur met een zwarte stip?
- Wat ziet/weet een adviseur met een witte stip?
- Wanneer stappen er adviseurs naar voren?

Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: 



Een adviseur met een zwarte stip ziet twee zwarte stippen en voor de rest witte. Hij weet zelf niet of hij een zwarte of een witte stip heeft. Daardoor weet hij dat er **twee of drie** adviseurs een zwarte stip hebben.

Een adviseur met een witte stip ziet drie zwarte stippen en voor de rest witte. Hij weet zelf niet of hij een zwarte of een witte stip heeft. Daardoor weet hij dat er **drie of vier** adviseurs een zwarte stip hebben.

In gedachten beginnen de adviseurs bij de situatie met één zwarte stip. De koning geeft in zijn vraag namelijk alleen aan dat er minstens één zwarte stip is. Die situatie wordt uitgesloten. Bij de herhalingsvraag van de koning wordt de situatie met twee zwarte stippen uitgesloten. Daarin wist een adviseur met een zwarte stip dat er **één of twee** adviseurs een zwarte stip hadden. Een adviseur met een witte stip wist dat er **twee of drie** adviseurs een zwarte stip hadden. Pas bij de derde vraag weten de adviseurs met een zwarte stip dus dat zij zelf een zwarte stip hebben en stappen ze alledrie naar voren.

N.B. Waar hij staat, wordt hij/zij bedoeld.

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.



Voorbeeld van beoordeling Huiswerk 3b: Uitgaan

Naam:	Huiswerk 3b: Uitgaan
Instructies:	Maak de onderstaande opgave. Kies daarna 'Verzenden'.
Meerdere pogingen:	Niet toegestaan. Deze Toets kan slechts eenmaal worden gemaakt.
Voltooiing afdwingen:	Deze Toets kan worden opgeslagen en later worden hervat.

▼ Vraagvoltooiingstatus:

Vraag 1

4 punten

Los de onderstaande puzzel op. Geef duidelijk aan hoe je aan je oplossing gekomen bent.

Petra wil vrijdagavond uitgaan en belt haar vrienden met de vraag wie er zin heeft om mee te gaan. De vrienden hebben allemaal zo hun eisen. Dit zijn de antwoorden die Petra krijgt:
Marieke: 'Ja, ik wil wel mee als we minimaal met z'n drieën zijn. En als Omar meegaat, dan moet Natasja ook meegaan.'
Natasja: 'Ja, ik ga mee, maar alleen als Omar én Marieke ook meegaan.'
Omar: 'Ik ga mee, maar niet als Marieke en Natasja allebei meegaan.'

Wie gaan er op stap en wie blijven er thuis?

Normaal	▼	3	▼	Times New Roman	▼	B	I	U			
▼											

**Beoordeling doornemen: Huiswerk 3b: Uitgaan**

Naam:	Huiswerk 3b: Uitgaan
Status:	Needs Grading
Score:	Cijfer is niet beschikbaar.
Instructies:	Maak de onderstaande opgave. Kies daarna 'Verzenden'.

Vraag 1 Cijfer nodig

Los de onderstaande puzzel op. Geef duidelijk aan hoe je aan je oplossing gekomen bent.

Petra wil vrijdagavond uitgaan en belt haar vrienden met de vraag wie er zin heeft om mee te gaan. De vrienden hebben allemaal zo hun eisen. Dit zijn de antwoorden die Petra krijgt:
Marieke: 'Ja, ik wil wel mee als we minimaal met z'n drieën zijn. En als Omar meegaat, dan moet Natasja ook meegaan.'
Natasja: 'Ja, ik ga mee, maar alleen als Omar én Marieke ook meegaan.'
Omar: 'Ik ga mee, maar niet als Marieke en Natasja allebei meegaan.'



Wie gaan er op stap en wie blijven er thuis?

Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: ✓ Alleen Petra en Omar gaan uit. Marieke en Natasja blijven dus thuis. Natasja gaat namelijk alleen mee als Omar en Marieke allebei meegaan. Omar wil echter niet samen met Marieke en Natasja op stap. Marieke wil daarentegen niet met Omar mee zonder Natasja.

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

[CURSUSSEN](#) > [WISKUNDE A VOOR A4M \(GROEP BRH\)](#) > HUISWERK 4[BEWERKWEERGAVE](#)

Huiswerk 4



Huiswerk 4: Propositional Logica

Huiswerk 4 bij Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica (= handelingsdeel).
Deadline: maandag 15 mei 12:00uur.

Zorg dat je onder je eigen naam bent ingelogd voordat je de opdrachten gaat maken.



Voorbeeld van beoordeling Huiswerk 4: Propositielogica

Naam:	Huiswerk 4: Propositielogica
Instructies:	Maak de onderstaande opgaven. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.
Meerdere pogingen:	Niet toegestaan. Deze Toets kan slechts eenmaal worden gemaakt.
Voltooiing afdwingen:	Deze Toets kan worden opgeslagen en later worden hervat.

Vraagvoltooiingstatus:

Vraag 1

4 punten

Lees eerst alle zeven vragen rustig door, voordat je aan de opgaven begint.

Verzin zelf een bewering waar minimaal twee connectieven in voorkomen. Maak daarbij gebruik van de connectieven op pagina 37: en, of, niet, als-dan, juist dan als. Schrijf de bewering gewoon in het Nederlands op.

Normaal	3	Times New Roman	B	<i>I</i>	<u>U</u>			
---------	---	-----------------	----------	----------	----------	--	--	--

Vraag 2

6 punten

Vertaal jouw bewering uit vraag 1 naar een formule in de Propositielogica. Geef daarbij eerst aan wat de deelbeweringen zijn. Gebruik voor de connectieven de symbolen van pagina 37.

De symbolen voor de connectieven vind je in de vergelijkingseditor 'WebEQ'. Door op het pijltje onder de tekstopties te klikken verschijnen er meer opties. 'WebEQ' wordt aangegeven met $\sqrt{x}$. Schrik niet als na je na 'Toevoegen' iets van de vorm <@[... equation ...]@> ziet staan. Dat is namelijk je formule. Met de knop 'Voorbeeld' kun je je formule gewoon bekijken.

Normaal	3	Times New Roman	B	<i>I</i>	<u>U</u>			
---------	---	-----------------	----------	----------	----------	--	--	--

Vraag 3**4 punten**

Hoeveel mogelijkheden moet je onderzoeken om te bepalen wanneer jouw bewering waar is? Geef een duidelijke toelichting. Kijk hiervoor nog eens terug naar opdracht 26 (pagina 46).

Normaal	3	Times New Roman	B	<i>I</i>	<u>U</u>			

Vraag 4**10 punten**

Maak een waarheidstabel bij jouw formule.

*Door op het pijltje onder de tekstoptyes te klikken verschijnen er meer opties. Met 'Tabel maken' (achtste optie) kun je dan een tabel invoegen. In een tabel kun je helaas 'WebEQ' **niet** gebruiken! De voegwoorden **en**, **of** en **niet** mag je gewoon in woorden opschrijven. **Als-dan** kun je maken met een ==-teken en groter dan-teken: ==>. Bij **juist dan als** zet je daar nog een kleiner dan-teken voor: <==>.*

Normaal	3	Times New Roman	B	<i>I</i>	<u>U</u>			

Vraag 5**4 punten**

Wanneer is jouw bewering waar? Geef een duidelijke toelichting.

Normaal	3	Times New Roman	B	<i>I</i>	<u>U</u>			

Vraag 6**4 punten**

Wanneer is jouw bewering onwaar? Geef een duidelijke toelichting.

Normaal	▼	3	▼	Times New Roman	▼	B	<i>I</i>	<u>U</u>			

Vraag 7**2 punten**

Is jouw bewering een tautologie? Verklaar je antwoord.

Normaal	▼	3	▼	Times New Roman	▼	B	<i>I</i>	<u>U</u>			



Beoordeling doornemen: Huiswerk 4: Propositielogica

Naam:	Huiswerk 4: Propositielogica
Status:	Needs Grading
Score:	Cijfer is niet beschikbaar.
Instructies:	Maak de onderstaande opgaven. Na de laatste opgave druk je op 'Verzenden'.

Vraag 1 Cijfer nodig

Lees eerst alle zeven vragen rustig door, voordat je aan de opgaven begint.

Verzin zelf een bewering waar minimaal twee connectieven in voorkomen. Maak daarbij gebruik van de connectieven op pagina 37: en, of, niet, als-dan, juist dan als. Schrijf de bewering gewoon in het Nederlands op.



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 2 Cijfer nodig

Vertaal jouw bewering uit vraag 1 naar een formule in de Propositielogica. Geef daarbij eerst aan wat de deelbeweringen zijn. Gebruik voor de connectieven de symbolen van pagina 37.

De symbolen voor de connectieven vind je in de vergelijkingseditor 'WebEQ'. Door op het pijltje onder de tekstopties te klikken verschijnen er meer opties. 'WebEQ' wordt aangegeven met $\sqrt{x}$. Schrik niet als na je na 'Toevoegen' iets van de vorm <@[... equation ...]@> ziet staan. Dat is namelijk je formule. Met de knop 'Voorbeeld' kun je je formule gewoon bekijken.



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 3 Cijfer nodig

Hoeveel mogelijkheden moet je onderzoeken om te bepalen wanneer jouw bewering waar is? Geef een duidelijke toelichting. Kijk hiervoor nog eens terug naar opdracht 26 (pagina 46).



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 4 **Cijfer nodig**

Maak een waarheidstabel bij jouw formule.

*Door op het pijltje onder de tekstopties te klikken verschijnen er meer opties. Met 'Tabel maken' (achtste optie) kun je dan een tabel invoegen. In een tabel kun je helaas 'WebEQ' **niet** gebruiken! De voegwoorden **en**, **of** en **niet** mag je gewoon in woorden opschrijven. **Als-dan** kun je maken met een =-teken en groter dan-teken: $\Rightarrow$. Bij **juist dan als** zet je daar nog een kleiner dan-teken voor: $\Leftrightarrow$.*



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 5 **Cijfer nodig**

Wanneer is jouw bewering waar? Geef een duidelijke toelichting.



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 6 **Cijfer nodig**

Wanneer is jouw bewering onwaar? Geef een duidelijke toelichting.



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

Vraag 7 **Cijfer nodig**

Is jouw bewering een tautologie? Verklaar je antwoord.



Geselecteerd antwoord: [Geen gegeven]

Juist antwoord: [Geen]

Feedback: Er is geen feedback beschikbaar totdat er een puntenaantal aan de vraag is toegekend.

C3: Docentenhandleiding

Docentenhandleiding bij Wiskunde & Filosofie: Logica

De lessenserie 'Wiskunde & Filosofie: Logica' laat leerlingen bewust nadenken over redeneringen. Ook is er aandacht voor bewijzen in de vlakke meetkunde, waarin enige redeneringen achter elkaar gehouden worden. Uiteindelijk wordt er toegewerkt naar de Propositielogica en de bijbehorende waarheidstabellen. De lessenserie bestaat uit acht lessen en vier huiswerkopdrachten. De huiswerkopdrachten staan in Brainbox (Blackboard-omgeving), waardoor een leerling op ieder gewenst moment een opdracht naar de docent kan verzenden. Desgewenst kunnen de opdrachten ook geprint worden, zodat leerlingen de opgaven op papier kunnen inleveren.

Doelgroep

Leerlingen uit 4 vwo met het profiel 'Cultuur & Maatschappij' of 'Economie & Maatschappij'

Studielast

15 studiebelastingsuren

Voorkennis

- Leerlingen kunnen zelfstandig opdrachten in Brainbox maken.
- Leerlingen hebben basiskennis van de vlakke meetkunde:
 - Leerlingen weten wat een rechte (90°) en gestrekte (180°) hoek is.
 - Leerlingen weten dat de hoekensom in een driehoek 180° is.
 - Leerlingen kennen de bijzondere vierhoeken: vierkant, rechthoek, parallellogram, ruit en vlieger en kunnen deze figuren tekenen.
 - Leerlingen weten wat een diagonaal is.
- Leerlingen kennen de stelling van Pythagoras en kunnen deze toepassen.

Doelstellingen

- 1) Leerlingen kunnen Logica plaatsen binnen een geschiedkundig kader.
- 2) Leerlingen kunnen beweringen herkennen en aangeven of deze waar of onwaar zijn.
- 3) Leerlingen kunnen redeneringen in de vorm als...dan... gieten.
- 4) Leerlingen weten wat een bewijs is en kunnen relatief eenvoudige bewijsjes in de vlakke meetkunde afmaken.
- 5) Leerlingen weten wat een tegenvoorbeeld is en kunnen bij een onjuist vermoeden tegenvoorbeelden zoeken.
- 6) Leerlingen kunnen bij redeneringen werken met gevalonderscheiding.
- 7) Leerlingen kunnen als...dan...-beweringen herkennen en kunnen zelf zinnen herschrijven naar die vorm.
- 8) Leerlingen zijn zich ervan bewust dat de woordvolgorde in het Nederlands niet strikt is vastgelegd.

- 9) Leerlingen kunnen als...dan...-beweringen korter schrijven met de implicatiepijl.
- 10) Leerlingen kunnen een uitspraak omdraaien en controleren op waarheid.
- 11) Leerlingen weten wat een drogreden is.
- 12) Leerlingen weten wanneer zij juiste conclusies kunnen trekken uit een als...dan...-bewering: modus ponens en modus tollens.
- 13) Leerlingen kunnen een dubbele implicatie, oftewel equivalentie, herkennen.
- 14) Leerlingen kunnen beweringen omschrijven naar formules uit de Propositielogica door gebruik te maken van propositieletters en de connectieven $\wedge$ (en), $\vee$ (of), $\neg$ (niet-), $\Rightarrow$ (als..., dan...) en $\Leftrightarrow$ (...juist dan als...).
- 15) Leerlingen zijn zich bewust van het verschil tussen het 'en' en het 'of' uit de Propositielogica en het 'en' en het 'of' uit het Nederlands.
- 16) Leerlingen kennen de waarheidstabellen bij de in 14) genoemde connectieven.
- 17) Leerlingen kunnen met behulp van waarheidstabellen de equivalentie tussen formules aantonen.
- 18) Leerlingen kunnen de waarheid van beweringen met behulp van een waarheidstabel controleren.
- 19) Leerlingen kunnen de vergelijkingseditor 'WebEQ' in Brainbox gebruiken.
- 20) Leerlingen zien dat de waarheidstabellen een handig hulpmiddel (algoritme) zijn voor bepaalde ingewikkelde problemen.

Werkvormen

De lessenserie bestaat uit een achttal lessen (klokuren) die deels klassikaal aangestuurd kunnen worden. Korte stukjes theorie kunnen afgewisseld worden met opdrachten die zowel zelfstandig als in teams gemaakt kunnen worden.

De huiswerkopdrachten zijn bedoeld voor individuele verwerking van de leerstof. In het lesmateriaal staat een toelichting bij de opdrachten in Brainbox. De docent kan de opdrachten hierdoor desgewenst voorbespreken. Door de deadline van het huiswerk ruim voor aanvang van de volgende les te plannen, kan de docent van tevoren het huiswerk bekijken. Hierdoor wordt gerichte feedback tijdens de nabespreking/terugkoppeling mogelijk gemaakt.

Lessuggesties

- **Pagina 5/6: kaartspel**

Dit kaartspel dient als introductie over redeneren en kan zowel klassikaal als in groepjes van drie gespeeld worden. Bij de klassikale versie zijn goede ervaringen opgedaan met grote gekleurde kaarten met een zwarte achterkant die aan het schoolbord bevestigd worden. Bij de versie in groepjes moet overal waar docent staat in de spelregels 'spelleider'

gelezen worden. De spelleider is het derde teamlid. De teams kunnen een gewoon stok kaarten gebruiken.

- **Pagina 11: bewijs 'In een vierhoek is de som van de hoeken 360° .'**
In het bewijs staat: "We weten al dat de som van de hoeken in een driehoek gelijk is aan 180° (weet je nog waarom?)." Wellicht kunt u dat op het bord nogmaals laten zien met behulp van Z-hoeken. Kleurtjes kunnen hierbij functioneel zijn.
- **Pagina 14: opdracht 6**
Deze opdracht geeft waarschijnlijk bij veel leerlingen problemen. Om de tekening niet meteen cadeau te geven, kunt u de leerlingen de volgende hint geven: "Begin je tekening met de hoek groter dan 180° ".
- **Pagina 16-19: opdracht 8 en bijbehorende theorie (stelling van Pythagoras)**
Opdracht 8 geeft leerlingen een gestructureerd bewijs, maar kan bij tijdgebrek zonder problemen worden overgeslagen.
- **Pagina 23: klassenopdracht**
De klassenopdracht kan naar keuze met de gehele klas gespeeld worden, maar ook door een gedeelte van de klas waarbij de rest toekijkt. Het is wel belangrijk dat degenen die toekijken bij de gevolgde redeneringen betrokken worden. Voor de stippen kunt u gebruik maken van kleine ronde stickertjes die bij een kantoorboekhandel of warenhuis verkrijgbaar zijn.
- **Pagina 26: opdracht 12**
Het woord 'omdraaien' is wellicht niet bij alle leerlingen bekend. Een klassikale toelichting bij de tekst in het kader kan zinvol zijn.
- **Pagina 27: opdracht 13**
Leerlingen kunnen in eerste instantie in de war raken van het woord 'als' in het vierde plaatje van de strip.
- **Pagina 29-35: les 5**
Les 5 is vrij lang en kan gesplitst worden. Het eerste gedeelte – pagina 29 tot halverwege pagina 33 – kan in één les doorgewerkt worden. Het gedeelte vanaf de equivalentie op pagina 33 kan in les 6 behandeld worden. Les 6 is dan ook wat korter.
- **Pagina 30: opdracht 16**
Opdracht 16a is moeilijk. Een mogelijke hint voor de leerlingen: "Moeten het wel rechte lijnstukken zijn?"
- **Pagina 35: opdracht 21**
Opdracht 21 is een mooie vakantieopgave, maar kan bij tijdgebrek ook worden overgeslagen.
- **Pagina 36: huiswerk 3a**
Huiswerk 3a is pittig. Leerlingen vinden het moeilijk om de redenering goed op te schrijven. Wellicht kunt u de leerlingen deze opdracht in duo's laten maken.
- **Pagina 40: opdracht 22d**
Bij opdracht 22e wordt pas om een equivalentie gevraagd. Misschien ontdekt een slimme leerling dat de bewering in opdracht 22d ook een dubbele implicatie bevat.

- **Pagina 41-48: les 7**

De waarheidstabellen kunnen in één les behandeld worden, maar het is wellicht verstandig om daar wat meer tijd voor uit te trekken. Dat kan door een extra les, maar ook door bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras uit les 3 over te slaan.

- **Pagina 42: waarheidstabel voor 'als..., dan...'**

De tabel voor als...dan... is moeilijk. Bereid u voor op mogelijke protesten vanuit de klas.

- **Pagina 52: opdracht 28**

Leerlingen zien in deze opgave, dat de waarheidstabellen een handig hulpmiddel zijn bij het oplossen van ingewikkelde problemen. In een klassengesprek kunt u wellicht aandacht besteden aan het automatiseren van een algoritme.

Extra opgaven

Na les 8 volgt een paragraaf met een drietal extra opgaven. Opdracht 29 en 30 kunnen na les 7 over de waarheidstabellen gemaakt worden. Opdracht 31 sluit aan bij als...dan...-beweringen en kan bijvoorbeeld na les 5 gemaakt worden.

Tijdgebrek

De volgende opgaven kunnen bij tijdgebrek zonder problemen worden overgeslagen:

- Opdracht 7 (pagina 15)
- Opdracht 8 (pagina 16-18)
- Opdracht 14 (pagina 28)
- Opdracht 21 (pagina 35)
- Opdracht 27 (pagina 48)

Bijlage D: Enquête: Wat vind je van Logica?

Export vragen vanuit Brainbox

[CURSUSSEN](#) > [WISKUNDE A VOOR A4M \(GROEP BRH\)](#) > [CONFIGURATIESCHERM](#) > [EINDTOETS](#) > VOORBEELD VAN BEOORDELING ENQUÊTE: WAT VIND JE VAN LOGICA?



Voorbeeld van beoordeling Enquête: Wat vind je van Logica?

Naam: Enquête: Wat vind je van Logica?
Instructies: Vul de onderstaande enquête in. Na de laatste vraag druk je op 'Verzenden'.
Meerdere pogingen: Niet toegestaan. Deze Toets kan slechts eenmaal worden gemaakt.
Voltooiing afdwingen: Deze Toets kan worden opgeslagen en later worden hervat.

Vraagvoltooiingstatus:

Vraag 1

0 punten

[Opslaan](#)

Ik vind 'Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica' een leuk project.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 2

0 punten

[Opslaan](#)

Ik vind 'Logica' een moeilijk onderwerp.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 3

0 punten

[Opslaan](#)

Ik denk dat waar we de laatste 4 weken mee bezig zijn geweest nuttig is.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 4**0 punten**[Opslaan](#)

Ik ben goed in waar we de laatste 4 weken bij wiskunde mee bezig zijn geweest.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 5**0 punten**[Opslaan](#)

Ik heb in de laatste 4 weken meer geleerd over redeneren.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 6**0 punten**[Opslaan](#)

Ik vind dat we de afgelopen 4 weken in de lessen genoeg zelfstandig konden werken.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 7**0 punten**[Opslaan](#)

Ik vind het lesmateriaal bij dit project er aantrekkelijk uitzien.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 8**0 punten**[Opslaan](#)

Ik vind het leuk om huiswerkopdrachten in Brainbox te maken.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 9**0 punten**[Opslaan](#)

Ik lever liever huiswerk op papier in dan via Brainbox.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 10**0 punten**[Opslaan](#)

Ik vind het leuk om uit ons wiskundeboek (**Moderne Wiskunde**) te werken.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 11**0 punten**[Opslaan](#)

Van alle wiskundige onderwerpen (zoals Analyse, Statistiek en Meetkunde) past Logica het beste bij mij.

- ☐ helemaal mee eens
- ☐ wel een beetje mee eens
- ☐ niet zo mee eens
- ☐ helemaal niet mee eens

Vraag 12**0 punten**[Opslaan](#)

Ten opzichte van de rest van het jaar heb ik de afgelopen 4 lesweken bij het vak Wiskunde

- ☐ minder hard gewerkt
- ☐ even hard gewerkt
- ☐ harder gewerkt

Vraag 13**0 punten**[Opslaan](#)

Je mag zo twee cijfers geven. Eerst een cijfer voor het project 'Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica', daarna voor het gehele vak Wiskunde.

Geef het project 'Wiskunde & Filosofie: lessenserie Logica' een rapportcijfer:

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 10

Vraag 14**0 punten**[Opslaan](#)

Geef het vak Wiskunde een rapportcijfer:

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 10

Vraag 15**0 punten**

Hieronder kun je nog iets kwijt dat niet in bovenstaande stellingen vermeld stond.

Normaal	▼	3	▼	Times New Roman	▼	B	<i>I</i>	<u>U</u>			
											