

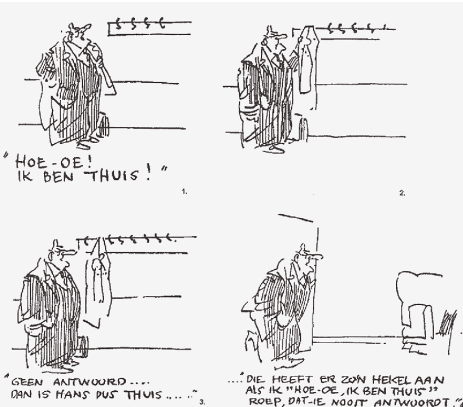
Als de eerste rood is, dan zijn ze allemaal rood

LOGICA IN 4-VWO ALS ONDERDEEL VAN WISKUNDE C

[Hugo Bronkhorst]

Inleiding

'Door de lessen Logica was ik meer gemotiveerd om naar de Wiskundeles te gaan, omdat ik de manier van lesgeven en de stof veel leuker vond en daarom ook beter mijn best deed', schreef een leerling uit 4-vwo over de nieuwe lessenserie Logica. Redeneren, kritisch nadenken, taalvaardigheden en met elkaar communiceren - doelen van Wiskunde C - komen terug in het lespakket waar ik nu twee jaar ervaring mee heb opgedaan. Centraal staan zogenaamde als-dan-beweringen, die concreet worden aangeboden in spelletjes, stripverhaaltjes, puzzels en wiskundige contexten voor de alfa-leerlingen: 'In eerste instantie vond ik het onzin maar toen ik het doorkreeg begreep ik ook het nut.' Na een algemene beschrijving van de door mij ontwikkelde lessenserie en de mogelijkheden binnen Wiskunde C, zullen in dit artikel twee praktijkvoorbeelden uit de lessenserie Logica de revue passeren: de kaartjes en de wijze adviseurs. Van beide voorbeelden wordt de spelvorm uitgebreid toegelicht, omdat daarbij de interactie met de leerlingen van cruciaal belang is, zodat hun nieuwsgierigheid geprikkeld wordt.



Uit: F.H. van Eemeren, R. Grootendorst, P. van Straaten (1996): *Leren argumenteren met Vader en Zoon*. Amsterdam/Antwerpen: Contact.

Na een spel, puzzel of strip volgt altijd een reflecterende/theoretische opgave. In dit artikel staat Logica binnen Wiskunde C

centraal, omdat het materiaal ontwikkeld is voor de alfa-leerlingen. Natuurlijk is redeneren ook belangrijk voor havo-leerlingen en bèta-leerlingen, maar die groepen vielen buiten mijn onderzoek. Bovendien bestaat er voor de bèta-leerlingen al lesmateriaal^[1].

Logica en Wiskunde C

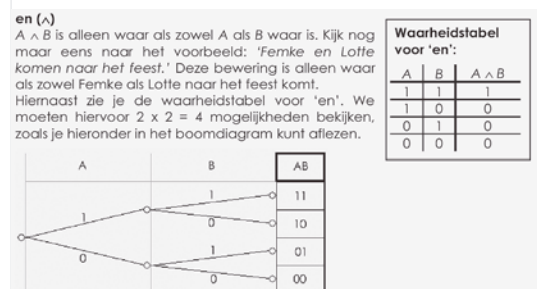
In het nieuwe conceptexamenprogramma 2011 voor Wiskunde C wordt 'Logisch redeneren' expliciet genoemd in domein G^[2]: 'De kandidaat kan logische redeneringen analyseren op correct gebruik.' Het omvat 40 studielasturen. De commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) werkt op dit moment aan materiaal dat op een aantal scholen uitgetest gaat worden. De door mij ontwikkelde lessenserie Logica is ontwikkeld en uitgetest voordat bekend werd dat Logica definitief een plaats in het conceptprogramma zou krijgen. Toch sluit dit materiaal, dat 15 studielasturen omvat, prima aan bij doelen uit domein G. Tot die tijd kan het materiaal gebruikt worden binnen domein I, Keuzeonderwerpen, waarvoor het oorspronkelijk is geschreven. De afgelopen twee jaar is het materiaal in 4-vwo uitgetest onder leerlingen met Wiskunde A1 (nu: Wiskunde C) en Wiskunde A12 (nu: Wiskunde A). Het materiaal sprak hen aan. Ze gingen over het algemeen dan ook enthousiast met de opdrachten aan de slag.

Lespakket Logica

Het lespakket^[3], waarin redeneren centraal staat, bestaat uit een achttal lessen en vier huiswerkopdrachten en is met name bedoeld voor de alfa- (en gamma-)leerlingen in 4-vwo met het profiel C&M of E&M. De lessen zijn zo opgezet dat de docent verschillende werkvormen kan toepassen: korte klassikale introducties en nabesprekingen, opdrachten die zelfstandig gemaakt kunnen worden, opdrachten voor tweetallen en groepsopdrachten. De huiswerkopdrachten zijn bedoeld voor individuele verwerking. Ik heb deze via de elektronische leeromgeving aangeboden, maar de opdrachten kunnen ook op papier gemaakt worden. Het uiteindelijke doel van de

lessenserie is dat leerlingen goed met als-dan-beweringen overweg kunnen. Daar wordt stapsgewijs naar toe gewerkt. De inleiding van de lessenserie begint met een kort geschiedkundig kader. Van de syllogismen bij de oude Grieken wordt snel de stap naar de Moderne Logica van Gottlob Frege gemaakt. Er was tenslotte ook 2000 jaar nauwelijks iets mee gebeurd. Vervolgens worden in de eerste les al beweringen (algemene kennis) als 'Amsterdam is de hoofdstad van Noord-Holland' en '4 + 2 = 8' op waarheid gecontroleerd. Daarna worden redeneringen in de als-dan-vorm gegoten: 'Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180°.' Via relatief eenvoudige bewijsjes in de vlakke meetkunde en het geven van tegenvoorbeelden komt het begrip *gevalonderscheiding* om de hoek kijken. De bewijzen van de hoekensom in een driehoek en in een

figuur 1



vierhoek worden door de docent voorgedaan. Vervolgens moeten leerlingen zelf wat bewijsjes opschrijven, bijvoorbeeld voor de hoekensom van een vijfhoek en een invulbewijs bij de stelling van Pythagoras. In de lessenserie wordt bewust stilgestaan bij de woordvolgorde van het Nederlands om daarna het omdraaien van uitspraken en drogredenen in stripjes te onderzoeken. De woorden *als* en *dan* worden in het Nederlands namelijk lang niet altijd expliciet in de zin genoemd. Voorbeeld: 'Als ik hard fiets, dan kan ik het groene verkeerslicht halen' kan ook geschreven worden als: 'Door hard te fietsen kan ik het groene verkeerslicht halen' of 'Ik kan het groene verkeerslicht halen als ik hard fiets.' Leerlingen weten na deze lessen wanneer zij juiste conclusies kunnen trekken uit een als-dan-bewering: *modus ponens* en

Ronde 1	het gegeven rijtje			R			Score ronde 1		
	jouw voorspelling						+	X	-
	score								
Ronde 1	het gegeven rijtje			R			Score ronde 1		
	jouw voorspelling	-	G	R	R	R	+	X	-
	score								
Ronde 1	het gegeven rijtje	G	R	R	R	R	Score ronde 1		
	jouw voorspelling	-	G	R	R	R	+	X	-
	score	X	-	+	+	+	3	1	1

figuur 2, 3, 4

modus tollens (zie kader). Ook kunnen zij een dubbele implicatie, de zogenaamde equivalentie, herkennen.

Modus ponens en modus tollens

Bewering: 'Als het sneeuwt, (dan) komt Sandra niet naar school.'

Algemeen: Als A , dan B .

Modus ponens (bevestigende modus):

Het sneeuwt, dus Sandra komt niet naar school.

Algemeen: A , dus: B .

Modus tollens (ontkennende modus):

Sandra komt (wel) naar school, dus het sneeuwt niet.

Algemeen: niet- B , dus: niet- A .

De lessenserie wordt afgesloten met een stukje Propositie logica. Leerlingen kunnen beweringen omschrijven naar formules door gebruik te maken van propositieletters en de connectieven *en* (\wedge), *of* (\vee), *niet* (\neg), *als-dan* (\Rightarrow) en *juist dan als* (\Leftrightarrow). De waarheid van deze beweringen kunnen zij vervolgens onderzoeken met waarheidstabellen. De waarheidstabel bij het connectief *en* staat als voorbeeld in figuur 1.

De leerlingen hebben zo dus ook iets systematisch aangeleerd gekregen. Vanuit een wiskundig oogpunt bekeken is een formalisering belangrijk. Door een puzzel die eerder al informeel als huiswerkopdracht is gemaakt, formeel met waarheidstabellen op te lossen, zien de leerlingen dat de tabellen een handig hulpmiddel (algoritme) zijn voor bepaalde ingewikkelde problemen.

Het is mooi om te zien hoe het inzicht van de leerlingen bij het bewijzen stapsgewijs doorbreekt. Ter illustratie een korte discussie tussen een tweetal leerlingen en hun docent. Ze hadden eerst bij opgave a een bewijs geleverd. Bij b werd vervolgens gevraagd: 'Kun je bij de bovenstaande bewering nu toch nog een tegenvoorbeeld geven?'

Leerling 1: 'Wij hebben echt alles geprobeerd maar we kunnen geen enkel tegenvoorbeeld vinden.'

Ik: 'Wat heb je dan bij vraag a gedaan?'

Leerling 1: 'Ja, een bewijs geleverd voor elke driehoek.'

Ik: 'Dus...'

Leerling 2: 'Oh ja! Deze vraag is echt gemeen!!'

Pas door deze extra vraag kregen deze leerlingen écht door wat de kracht van een bewijs is en dat je daarmee alle uitzonderingen uitsluit.

Kaartjes

De Kaartjes^[4] is een redeneerspel dat als rode draad door het lespakket loopt - in de introductie als kaartspel, later als concreet referentiekader bij theorie-opdrachten. In de introductie bestaat dit spel uit kaarten die aan de voorkant groen of rood zijn en aan de achterkant zwart. Bij elke ronde worden er vijf kaarten met de zwarte kant naar voren aan het bord gehangen volgens de regel: *Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje (rechts dus) ook rood*. De leerlingen mogen bepalen welke van de vijf kaarten ze willen zien (de meerheid van stemmen telt) om vervolgens de kleur van de andere kaarten te voorspellen. Het spel wordt dus klassikaal gestuurd gespeeld. Het werkblad vullen ze in teams van twee in. In de docentenhandleiding staan suggesties om het gehele spel in groepjes van drie uit te spelen met een gewoon stok kaarten.

In een les in 4-vwo gaven team 1 en 2 de onderstaande redeneringen tijdens de discussies welke kaart omgedraaid moest worden: Team 1: 'We willen de eerste zien, want als die rood is, zijn ze allemaal rood.'

Team 2: 'Nee, we willen de derde zien, want dan heb je een veel grotere kans dat we wat kaarten goed hebben.'

Na enig overleg draaide ik de derde kaart om en die kaart bleek rood te zijn. Van het rijtje was nu één kaart gegeven en de leerlingen zagen voor het bord de situatie als in figuur 2. Vervolgens was de opdracht aan de leerlingen een voorspelling te doen voor de andere vier kaarten. De gegeven regel bleef natuurlijk gelden.

Een leerling tegen zijn teamgenoot: 'De derde is rood, dan weten we er al drie zeker.' Hun voorspelling staat in figuur 3. Nadat elk team een voorspelling had gedaan, draaide ik de overige kaarten om en maakten we de balans op. Hoeveel kaarten waren er goed, fout of niet voorspeld (zie figuur 4)? Na vijf ronden won het team met de meeste plusjes (dus de meeste goed geraden kaarten). Bij gelijke stand won het team met de minste minnetjes. Na afloop van dit spel bleken leerlingen achterliggende redeneringen bij dit spel goed te kunnen opschrijven.

In het huiswerk staan vervolgens twaalf rijtjes van vijf kaarten waarvan elke kaart opnieuw rood of groen gekleurd is. Aan de leerlingen de taak om na te gaan of elk rijtje aan de gegeven regel voldoet: *Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood*. Verderop in de lessenserie worden steeds vier van de vijf kaarten getoond. De rijtjes worden opnieuw van links naar rechts bekeken. Aan de leerlingen wederom de taak om te controleren of elk rijtje aan de bovengenoemde regel voldoet, of dat ze dat niet kunnen weten.

Ook bij het trekken van conclusies uit als-dan-beweringen (bijvoorbeeld modus ponens en modus tollens) en de introductie van waarheidstabellen komen de kaartjes nog een keer terug. De kaartjes vormen tenslotte een concreet ervaren voorbeeld.

De wijze adviseurs

In les 4 had ik een aansprekende klassenopdracht, *De wijze adviseurs*. Deze diende om als-dan-redeneringen in het Nederlands en de wiskunde uitgebreid te oefenen. Ook werden in deze opdracht meerdere redeneringen achter elkaar gevoerd. *De wijze adviseurs*^[5] is een variatie op een probleem dat ook wel bekend staat als de *Modderige kinderen*. In *De wijze adviseurs* wil de koning de wijsheid van zijn adviseurs testen. Hij doet dat door bij alle adviseurs een witte of een zwarte stip op hun voorhoofd te zetten. De adviseurs zijn zo in een kring opgesteld dat ze alle stippen kunnen zien, maar niet die van zichzelf. De koning gaat in het midden van de kring staan en zegt: 'Ik heb bij ieder van jullie een witte of een zwarte stip op het voorhoofd geschilderd. Ten minste één van de stippen is zwart. Wie een zwarte stip heeft, dient zo snel mogelijk naar voren te stappen.'



In de klas stelde ik de leerlingen in een cirkel op en vroeg hen om de ogen dicht te doen. Ik plakte de stippen met ronde stickertjes op hun voorhoofd. De eerste keer plakte ik maar één zwarte stip en voor de rest witte stippen. Toen de leerlingen hun ogen open deden, keken ze elkaar gespannen aan. Nadat de docent, die de koning speelde, de bovenstaande uitspraak deed, stapte heel snel de ene leerling met de zwarte stip naar voren. Ze zei hierover in de nabespreking: *'Ik zag allemaal witte stippen, maar er moest er minstens één zwart zijn, dus ben ik naar voren gestapt.'* Een leerling met een witte stip reageert: *'Ja, ik zag een zwarte stip en verder allemaal witte, dus ik wachtte even af wat ze zou doen.'*

Voor de tweede ronde plakte ik bij twee leerlingen een zwarte stip. Het denkproces bij de leerlingen verliep nu moeizamer, maar dat was juist spannend. Een leerling met een witte stip zei: *'Ik zag wat witte en twee zwarte stippen. Ik dacht: Er zijn er in ieder geval twee zwart, maar het kunnen er ook drie zijn.'* Een van de twee leerlingen met een zwarte stip zei: *'Ik zag een zwarte stip bij Pim en verder alleen witte. Maar Pim stapte niet naar voren, dus moest ik er ook een hebben. Daarom stapte ik naar voren.'*

Bij dergelijke denkprocessen in de klas speel je als docent een cruciale rol; het is namelijk belangrijk om de leerlingen duidelijk te laten reflecteren en alles strak te regisseren om te voorkomen dat het misgaat of dat belangrijke denkstappen niet naar boven komen. Dat leerlingen hierdoor uitgedaagd werden blijkt uit de evaluatie van de lessenserie. Een leerling schreef: *'Het lesmateriaal was heel leuk, vooral die drie koningen. Dat idee met voor de klas en die stippen vond ik heel origineel en leuk bedacht. Met dat soort dingen krijg je meestal wel mijn aandacht te pakken.'*

Leerlingenfeedback

De leerlingen hebben de lessen over het algemeen enthousiast doorgewerkt. Uitkomsten van een leerlingenenquête en interviews gaven aan dat de lessenserie de leerlingen aansprak en dat ze het gevoel kregen wat geleerd te hebben. Dat ze inderdaad beter zijn gaan redeneren, blijkt uit een vergelijking van de resultaten tussen de voorkennistoets en de eindtoets waarin een aantal als-dan-rederingen de revue passeert. Meer hierover kunt u lezen in [3] met daarin ook het lesmateriaal en de bijbehorende docentenhandleiding. Logica als

onderdeel van het vak Wiskunde werd dan ook als een gewenste aanvulling ervaren, zowel door de docent als door de leerlingen. Een tweetal reacties: *'Het is leuker om iets te doen wanneer je echt goed snapt waar je mee bezig bent.'* En: *'Ik vond het gewoon veel leuker om zo te werken!'*

Met dank aan Gerard Renardel de Lavalette, Marco Swaen, Rineke Verbrugge en Pauline Vos.

Literatuur

- [1] - Jan van Eijck, Jan Jaspers, Jan Ketting, Marc Pauly (2002): *Denkende Machines. Computers, rekenen, redeneren.* Amsterdam: Amsterdam University Press.
- Jan van Eijck, Albert Visser (2005): *Inzien en bewijzen.* Amsterdam: Amsterdam University Press.
- [2] Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (2008): *Concept examenprogramma 2011, vwo Wiskunde C.* Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [3] Hugo Bronkhorst (2006): *Logica in de bovenbouw van het vwo.* Groningen: Faculteit der Wiskunde en Informatica, Rijksuniversiteit Groningen. Gratis download van deze scriptie met lesmateriaal en docentenhandleiding op: www.hugobronkhorst.nl.
- [4] Christos Chasiotis (1995): *From Common Sense to Formal Logic / Use of Logical Games for the Assessment, Investigation and Improvement of Logical Reasoning.* In: *Congresbundel 47ste conferentie van CIEAEM.* Berlijn: Freie Universität; pp. 440-447.
- [5] Erik C.W. Krabbe, ed. (2005): *Logica 3 / Model, Oneindigheid en Paradox.* Groningen: Faculteit der Wijsbegeerte, Rijksuniversiteit Groningen.

Over de auteur

Hugo Bronkhorst is leraar wiskunde aan de Van der Capellen Scholengemeenschap in Zwolle. Hij geeft les in de onder- en bovenbouw en binnen het tweetalig onderwijs.
E-mailadres: bronkhorsthugo@gmail.com
URL: www.hugobronkhorst.nl

